# GEOMETRICA DEMONSTRATIO THEOREMATUM HUGENIANORUM

# GEOMETRICA DEMONSTRATIO
# THEOREMATUM
## HUGENIANORUM
*CIRCA*
## LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM,

*Qua occasione plures Geometricę Methodi exhibentur circa Tangentes, Quadraturas, Centra gravitatis, Solida, &c. variarum curvarum, uti infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum, Spiralium, &c. Aliæque Geometricæ Veritates illustrantur.*

ADDITA EPISTOLA GEOMETRICA AD P. THOMAM CEVAM S. J.


*AUCTORE*

D. GUIDONE GRANDO

CREMONENSI,

Monacho Camaldulensi, & in Almo Pisano Lyceo Publ. Phylosophiæ Professore.




*AD SERENISSIMUM*

## FERDINANDUM III.
## MAGNUM ETRURIÆ PRINCIPEM.






FLORENTIÆ, MDCCI.

Typis Regiæ Celsit. Apud Petrum Antonium Brigonci.

*Superiorum Permissu.*





# SERENISSIME
# PRINCEPS.



*Ingularis in Bonas Artes, maximèque in Mathematicas Disciplinas Ser.Cels. Tuæ Genius, atque in earumdem cultores* MEDICEO PRINCIPE *verè digna Propensio, & animum, & stimulos addiderunt, ut apud eamdẽ Celsitudinem Tuam Opusculum hoc Geometricum collocarem. Enimverò maximum operæ compendium facturum me intellexi, ubi speculatio-*

*nes*

*nes has meas ejusmodi Principi consecrarem, apud quem, & Scientiæ sublimitas, & Argumenti præstantia, & Doctrinæ utilitas nonnisi superfluè commendanda foret, nec repetitis, aut votis, aut precibus opus esset ad illius Tutelam Operi simul, Auctorique impetrandam. Horum scilicet studiorum pretium abundè nosti, Principum Optime, imò & nos ipsos non opere minùs, quàm verbo doces, quanti ipsa facienda sint, dum in illorum præsidium, qui eadem promovere student, ultrò Ipse descendis, quò confidentiùs, & securiùs ad Te accedere non vereantur. Omne igitur officium satis explevero, si citra verborum circuitum, brevi dumtaxat, simplicique narratione; quale mihi argumentum hìc tractandum susceperim, aperuero.*

*Clarissimus Vir Christianus Hugenius (notum Celsitudini Tuæ nomen, pro Litteraria, qua tantoperè excellis, Eruditione Tua, in Astronomicis præsertim, Physicis, & Geometricis rebus, quas ille disciplinas summè illustravit) ex* Logisticæ, *seu* Logarithmicæ *Lineæ proprietatibus nonnullas planè admirabiles ad calcem suæ Diatribæ de causa Gravitatis, citra demonstrationem ullam, nudè proposuit, quibus*

ipse-

*ipſemet uſus fuerat, ad arduas phyſicæ veritates in eodem tractatu indicandas, variorumq; problematum determinationem, ad motum corporum, ſeu per aerem projectorum, ſeu proprio pondere deſcendentium, computata etiam medii reſiſtentia, pertinentium expediendam. Quum itaque inſignes adeò, ac geometrica contemplatione per ſe digniſſimas eſſe proprietates illas animadverterem, ac præterea in Philoſophicis etiam uſum habere poſſe, è re futurum judicavi, ut iiſdem demonſtrandis operam darem, quò pleniùs de ipſarum veritate conſtaret, eòq; tutiùs deinceps ad Phyſicam transferrentur; Longiſſimè ſiquidem à Geometriæ ditione exulare cognoveram Pythagoricum illud,* Ipſe dixit, *parvamque adeò ſolius pronunciantium Auctoritatis in hac Scientia rationem haberi; atq; id quidem meritò, quippe & Magnorum aliquando Virorum determinationibus abſque demonſtratione propoſitis (ſeu methodi, ſeu applicationis, ſeu calculi lapſu, quem in extendenda demonſtratione facillimè animadvertiſſent) falſitatem irrepſiſſe deprehendimus. Evidentiam itaque in ejuſmodi eſſe exigendam, quæ Geometricis potiſſimùm ratiociniis eſt concilianda. Geometricè idcircò ſingu-*

*gulas ex propositis ab Hugenio Logisticæ Proprietatibus demonstrare aggressus sum, nec uno plerumque modo, sed pluribus, iisque admodùm generalibus, atque ad infinitarum Parabolarũ, Hyperbolarum, Spiralium, aliarumq; variarũ curvarum Tangentes, Quadraturas, Solida determinanda conducentibus, ut non soli Logisticæ, sed omnibus ferè sub Geometricam considerationem cadentibus figuris, præsentis Opusculi utilitas communis esset.*

*Et hic quidem, SERENISS. PRINCEPS, hujus Commentarioli mei scopus, hæc summa est, quod cùm per se se exiguum sit, suique ratione Auctoris obscurum, Tui Nominis tamen Luce ejus fronti affulgente, non usque adeò vilescere poterit, imò & supra conditionis, atque indolis suæ sortem sperare incipiet; quamquàm id unum mihi abundè suffecturum sit, ut mei erga S.C.T. obsequii, grat æq; erga Augustissimam MEDICEAM Domum, cui tot beneficiis devincor, observantiæ, acceptum Tibi pignus, perpetuumque in omnem posteritatis memoriam monumentum existat.*

*Ex Monast. Angelorum Flor. Idib. Julii MDCCI.*

*Sereniss. Celsitud. Tuæ*

*Humillimus, Addictiss. atque Obsequentiss. Famulus*
D. Guido Grandus Monachus Camald.



# AD LECTOREM
# PRÆFATIO.

1 

Onsuetudinis est apud Geometras vetustissimæ, ut quæ ab aliis sine demonstratione proposita sunt, sive Theoremata, sive Problemata, sibimet ostendenda, ac geometricè confirmanda assumant, vel exercitationis propriæ, vel communis utilitatis gratia, ut certa ab incertis, à falsis vera secerni possint, atque hæc tutò recipi, ac in usum, si quem habent, converti, illa tanquam spuria, & fallaciter asserta respui, & amandari; id vel ex uno Archimede constare potest, qui in Præfatione ad Libros Spiralium, Cononem summis laudibus celebrat, ejusque inventa Mathematicis sine demonstratione proposita, sibi demonstranda assumit; id quod tā accuratè, tantoq; ingenio præstitit, *ut*, Bullialdo teste, *in sui admirationem, cùm æquales, tum posteros converterit; laudum titulos, nullo oblivionis situ inducendos, meruerit, earumque* (Spiralium) *inventori Cononi gloriam, palmamque præripuerit*. Enimverò qui in aliorum propositionibus demonstrā-

dis operam collocant, quàm arduam, difficilemque in se provinciam suscipiant, Vir Cl. Galilæus in Trutinatore, *pag.* mihi 48. luculenter ostendit, dum ait: *Longè sublimioris ingenii est alieni Problematis enodatio, aut ostensio Theorematis, quàm novi cujuspiam inventio; Hæc quippe fortunæ in incertum vagantibus obviæ plerumque esse solet; tota verò illa, quanta est, studiosissimam attentæ mentis, in unum aliquem scopum collimantis, ratiocinationem exposcit.*

2 Eumdem & ipse pulverem agitare aggressus, quemadmodùm ante biennium Viviapea Problemata Tibi geometricè demonstrata obtuli, innumeris aliis veritatibus, seu planè novis, seu majori compendio ex prolixa Veterum supellectili deductis, Conicorumque præsertim Fornicum Tetragonismo locupletata; ita nunc HUGENIANA THEOREMATA, longè adhuc plurium speculationum campum, pro variis, iisque generalibus methodis, quibus in eorumdem demonstratione uti placuit, aperientia, communicare proposui. Seriùs id quidem, si Theorematum Hugenii propositionem spectes, illa quippe ad calcem Diatribæ *de Causa Gravitatis*, Tractatui *de Lumine* ejusdem Auctoris adnexæ, usque ab Anno 1690. Lugduni Batavorum excusa jàm prostant; Sin verò eadem animadvertēdi copiā ante paucos mēses mihi nunc primùm factam attendas, satis adhuc tempestivè. Hoc scilicet Anno dumtaxat, quum Pisis degerem, & obeundis Phylosophicæ Cathedræ, ad quam Regiæ Magni Etruriæ Ducis Celsitudinis Benefi-

ficentia nuper vo catus fueram, muneribus incumbetem; apud Humanissimum æquè, ac Nobilissimum Juvenem Lucam Albizium S.Stephani Equitem, in his, quæ ad Geometriam, ad Physicam, multiplicemque Eruditionem spectant, apprimè versatum, prælaudati Hugeniani Tractatus exemplar tandem invenire, ac sedulò evolvere potui. Rapuit animum statim Propositionum illarum, quæ & scitu jucundæ, & vestigatu difficiles videbantur, Utilitas, atque Elegantia, inde siquidem, ipsomet Hugenio fatente, pendere videbam, quæ Vir Clarissimus de Gravium projectione perpendiculari, & obliqua, eorumque descensu pronunciaverat, in hypothesi, quòd resistentiæ mediorum in eadem ratione crescerent, cum velocitatibus corporum, uti eatenus creditum fuerat; Ac de Physicis quidem Propositionibus vix sollicitus fui, quum jam de hypothesi non conveniret, majorque, Hugenio teste, se oblatura esset in ipsarum demonstratione difficultas, quàm quæ rei pretio compensaretur.

3 De Geometricis secus apud me statui: legeram apud Serenum Antistensem Epist. ad Cyrum, præfixa lib. 1. de sect. cylindri. *Absurdum omninò videri, Geometras ipsos de Problemate Geometrico sine demonstratione quicquam affirmare*; & quamvis longissimè abessem ab ejusmodi consuetudine generaliter idcircò damnanda, quum scirem, justis de causis, seu temporis inopia, seu brevitatis studio, sive exercitationis Lectorum gratia, id aliquando licere, quemadmodum & nobis, tum in proximè edito, tum in præsen-

ti etiam Opusculo nonnulla exciderunt citra demonstrationem asserta; Geometriæ tamen, ac Physicæ promovendæ plurimùm interesse putavi, ut miranda hæc Theoremata ad Logisticam pertinentia tandem demonstrarentur, è quibus, quemadmodùm illæ, quas supra ex Hugenio laudabam, ità aliæ, & aliæ Phylosophicæ Veritates certioribus hypothesibus innixæ profluere possent, quamdiù autem illa per legitimam demonstrationem firmas radices non agerent, inculta planè, ac sterilia jacerent. Et proprio igitur genio, & Amicorum stimulis accedentibus, ut in Logisticæ Proprietatum ab Hugenio propositarum veritatem inquirerem, de iisdem accuratè demonstrandis cogitare cœpi. Quod quidem fœliciùs, quàm ab initio speraveram, deinde successit, paucarum quippe horarum meditatione, octo priorum Theorematum (quinto excepto, quod abstrusiorem sibi poscere indaginem prævideram) demonstrationem inveni, nec multis post diebus reliqua omnia enucleavi, præter duodecimum, tertiumdecimum, ac quintum jam ab initio intermissum, quorum Veritas, ut in apertam lucem, vel ipsa spontè prodiret, vel educi se non invita pateretur, longioris operæ officiis invitanda, roganda, ac tantùm non per vim extrahenda fuit, nobiliorem quippe manum fortasse expectãs, obscuri hominis conatus refractaria dedignabatur.

4 Sed quorsum, inquies, à tanto Viro proposita in examen vocare, & ad demonstrationis amussim expendere oportuerat? An non satis tutò admitti pote-

terant, citra suspicionem ullam falsitatis, vel hoc ipso, quòd Acutissimus ille, & tot nominibus celebris Geometra rem ita se habere fidenter asseruerat? Archimedi, quidquid diceret, credendum deinceps esse Hyeron Syracusius, & Gelon Siciliæ Rex pronunciarunt, apud Proclum *lib.* 2, *cap.* 3. postquàm Navim contra omnium opinionem loco movisset, & Artificis fraudem ex Coronæ pondere ad calculos revocasset; Quid ni igitur, citra aliam indaginem, & Christiano Hugenio credimus, post fœliciter detectum Saturniū Annulum, post ostensas Curvarum Evolutarum proprietates, Cycloidis longitudinem demonstratam, Pendulique oscillationes ad isochronismum revocatas, ut de aliis taceamus præclaris inventis, quibus Physicam, Astronomiam, & Mathesim denique universam insigniter illustravit? Hæc certè si Archimedis tempore proposita fuissent, non minùs vestigatu ardua, inventuque difficilia censeri poterant, quàm minimæ potentiæ ad maximum pondus movendum per machinam elevatio, vel aurea corona permixti argenti discretio.

5 Ultrò ipse fateor, dignos esse summos Geometras, utpotè Veritatis commercio maximè omnium assuetos, quibus, etiam eorum, quæ pronunciant, demonstrationem reticentibus, fides nihilominus habeatur; neque enim *Mathematicos* concesso *Historicis* privilegio quis jure fraudaverit, quum ipsa *Geometria* à Pythagora *Historia* appellari consueverit, teste Jamblico in ejus vita, cap. 18. imò longè potior illius

sit,

sit, quàm istius ratio, quippe nulla ex parte, aut à lubricis famæ rumoribus; aut ab incertis documentis; aut à præoccupato partium studio sibimet imponi patitur Geometra, quum quidquam asserit, sed quod evidenti dumtaxat ratione apud se constiterit pronunciare solet; quo nomine perfectam Hystoriæ ideã Geometria præbet, quam utinam imitarentur qui Historicos agunt, nec quicquam te nerè solis conjecturis ducti, prout sibi somniaverint, describerent, sed ea dumtaxat, quibus (quantùm materia patitur) demonstrandis se idoneos, & paratos sentiunt! Nil tamen vetat, quin & ipsi Geometræ, cùm homines sint, lapsibus quoque obnoxii esse possint, primo siquidem obtutu veri speciem prætendere potest fallax quoddã ratiocinium Geometrarum mẽtibus uno impetu objectum, illosque in errorem inducere, à quo facilè sibi cavissent, si speculationum suarum demonstrationẽ per extensum adducere, ac per singulas partes attentiùs expendere voluissent; exempla sunt, & antiqua in Conone supra laudato, quem inter ingeniosissima inventa sua, Geometris absque demonstratione proposita, quædam complexum fuisse, quæ falsa erant, testis est idem Archimedes *loc. citat.* & recentia non desunt in Mathematicorum lectione versatis, quæ hìc referre non vacat, & alibi indicata habes *cap.* 12. *n.* 10.

6 Sed esto verissima omnia sint, quæ à Geometris sine demonstratione proponuntur (ut certè indubia sunt, quæ à Viviano, ab Hugenio, aliisq; summis Viris proposita habemus, neq; id fas in controversiam adducere

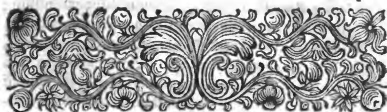
ducere) quamdiù hìc subsistunt Geometræ, tamdiú reverà *Puri Historici* munus obeunt; quiddam amplius Geometriæ titulis accedere par est, quàm nudam Historiæ laudem: utrumque Geometria munus habet, & vera proponere (quod Historiæ commune est) & eadem demonstrare (qua singulari dote ab Historia discernitur, & summum humanæ Sapientiæ verticem meritò possidet) Historiæ sufficit, si fidem pariat, Geometria, si evidentem prætereà rerum abs se propositarum scientiam Lectorum mentibus non inducit, vix Geometriæ nomen, & speciem servat. Non inutilis igitur operæ fuerit, à maximis ævi nostri Geometris asserta demonstrationibus suis communire, & quod illis, vel temporis, vel opportunitatis defectus invidit, supplere, quemadmodum pro viribus exequi, tum in antecedenti, tum in hoc nostro Opusculo conati sumus; Præsertim cùm ea occasione tam generales Tangentium, Quadraturarũ, ac Dimensionum methodos aperire, Tibique, Mi Lector, explanare licuerit, in quibus quid profecerim, quid aliorum inventis addiderim, Tui ipsius judicio relictum esto. Intereà, si hæc boni feceris, infinitis aliis, quæ adhuc, vel schedulis sparsa, vel ordinatiùs disposita premo, edendis animum dabis.

7 Antequàm tamen ad lectionem accedas, rogandus es, ut pauca quædam præli vitia corrigas, nequid deinceps offendas, quod attentioni tuæ moras injicere possit; non dico leviora quædam, quæ ad orthographiam spectant, ut cùm *pag.* 208 *lin.* 2. comma præfi-

xum

xum est verbo *altitudinis*, cui fuerat subnectendum; sed alia duo majoris momenti, quæ sensum turbare possent, primum *pag.* 42. ubi *lin* 4. habetur *punctum V*, legendum est enim *punctum I*, & viceversa *lin. seq.* ubi habetur *curvæ in u, I*, legendum *curvæ in u, V.* Alterũ *pag.* 162. ubi primo loco *Sturmium* numeratum mallem ante *Guarinum*, contra quàm factum sit. Hoc fortasse nihili faciendum ipse putabis; ego cur magnifaciam, causas habeo satis graves, certè hunc ordinem etiam in Epistola ad P. Cevam *num.* 16. observavi. In Figurarum præterea Schemmatibus quædam sculptorum vitio, aut deficere, aut perperam efformata esse deprehendes, quorum præcipua suis locis opportunè indicata invenies, pleraque tamen Lectorum Humanitati, ac Benevolentiæ excusanda remisi, nec enim ipse, alias inter sollicitudines, aut omnibus notandis idoneus, aut corrigendis ( prælo jam properante) sufficiens fui: profectò, æquus ipse cùm sis, ea mihi nullatenus imputanda esse intelliges. Vale.





# GUIDONIS GRANDI

MONACHI CAMALDULENSIS

In Pisana Academia Publ. Philos. Professoris

# GEOMETRICA DEMONSTRATIO

## THEOREMATUM HUGENIANORUM

CIRCA LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM.

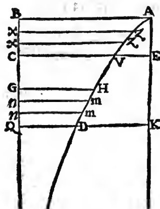
## CAPUT I.

*Logisticæ, seu Logarithmicæ descriptio. Ejus primaria proprietas. Logisticæ aliorum graduum. Ejusdem per duos motus generatio. Axem habet pro Asymptoto. Tam supra, quàm infra in infinitum continuari potest. Alio duplici motu describitur. Spiralis Logarithmicæ per duos motus descriptio. Ejus primaria affectio. Ad alios gradus extendi potest. Centro per infinitos cincinnos circumvolvitur; licèt longitudine finita sit. Æquè inclinatur cuilibet radio. Gravia per ipsam de-*

*delata eodem semper momento pollent, respectu momenti, quod haberent in perpendiculo, Cartesio etiam id primùm observante. Per convolutionem primæ Logisticæ gigni potest. Fallax, ex nonnullorum methodo, ratiocinium circa ejus spatii dimensionem.*

1 Recta methodus postulat, ut, antequam ad demonstrandas, quas Hugenius proposuit, Logisticæ proprietates accedamus, illius genesis, & descriptio præmittatur; imò & variis modis idem præstare non inutilis operæ pretium fuerit, inde siquidem non solùm primariæ ejusdem affectiones, ex quibus aliæ pendent, sponte sua profluere intelligentur, verùm etiam ad eorum, quæ deinceps dicenda sunt, intelligentiam haud parùm conducet clara, & distincta ejus naturæ notio per ejusmodi varias generationes Lectorum mentibus faciliùs indita, atque altiùs infixa.

2 Logistica igitur, seu Logarithmica linea illa est, in qua ordinatæ ad æquales axis partes sunt geometricè proportiona-



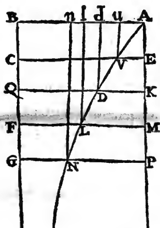

les; nempè diviso axe BQ in quotlibet partes æquales BC, CG, GQ, &c. si ad earumdem terminos ordinatæ BA, CV,

CV, GH, QD, &c. fuerint continuè proportionales, quæ per puncta A, V, H, D, (aliaque extrema z z, m m, mediarum proportionalium æquo ſemper intervallo duabus quibuslibet ordinatis interponendarum) tranſit linea, *Logiſtica*, ſeu *Logarithmica* appellari conſuevit, eò quòd inveniendis logarithmis inſerviat, uti ex ſequentibus manifeſtum erit.

3 Ex hac enim definitione conſtat, partes axis ita correſpōdere ordinatis, quemadmodum Logarithmi reſpondent naturalibus numeris, & quòd ratio quarumlibet duarum ordinatarum, veluti BA ad CV, reſpectu rationis ordinatarum BA ad QD in eadem proportione erit, in qua axis partes CB, & QB per has ordinatas abſciſſæ; ſiquidem, æqualiter creſcente axe, perinde æqualiter creſcit ordinatarum proportio, unde quàm multiplex eſt QB ipſius BC, tam multiplex pariter eſt ratio duarum BA, QD, rationis duarum BA, CV; & generaliter, rationes, quas invicem habent duo quælibet ordinatarum paria (etiamſi una pro communi antecedente, aut conſequente non ſumatur, ſed comparetur verbi gratia ratio duarum BA, CV, cum ratione, quæ eſt inter duas GH, QD) erunt ad invicem, ut partes axis quolibet ordinatarum pari interceptæ, uti ad ipſam curvæ hujus naturam attendendo, vel ſumptis, tum rationum illarum, tum axis partium æquè multiplicibus, facilè conſtare poteſt; atque hæc erit primaria Logiſticæ proprietas, per quam poterit expreſſiùs definiri, ejuſq; natura clariùs determinari.

4 Ubi obiter animadvertendum erit, poſſe aliorum etiam graduum Logiſticas excogitari, ſi videlicet rationes ordinatarum BA ad CV, & BA ad QD jam non forent ut partes axis BC, & BQ, ſed ut earumdem BC, & BQ quadrata, vel cubi, aliæve poteſtates, vel etiam radices quadratæ, vel cubicæ, aliorumve graduum, ſive in ratione axis partium, ut libuerit multiplicata, vel ſubmultiplicata; adde & ſeſquialtera, vel ſeſquitertia, &c. quas quidem Logiſticarum ſpecies hoc loco minimè conſiderandas ſuſcipimus; neque verò id aut ſuſceptæ exercitationis inſtitutum poſtulat, aut temporis etiam ratio permittit, ſed de prima, & ſimpliciſſima dumtaxat, quam ſuprà deſcripſimus, ſpecie erit hìc nobis cum Cl. Hugenio tractandum.

5 Porrò quum proportionalium differentiæ ſint in eadem ratione proportionales, manifeſtum eſt, ipſas A u, u d, d l, l n, &c. interceptas axi parallelis V u, D d, L l, N n æqualiter creſcentibus, fore in continua proportione earumdem ordinatarum; quare hæc linea, uti primus Logarithmorum Inventor Neperus delineare aggreſſus eſt, deſcribi intelligetur duplici motu, altero lineæ A B per B F æquabiliter, ſibique æquidiſtanter deſcendentis, altero puncti A motu continuè retardato versùs B delati, itaut ſpatia æqualibus quibuſcumque temporibus ſubinde tranſacta in eadem geometrica ratione




decreſcant; quomodo quo tempore linea deſcendens confecerit ſpatium B C, & ſitum C E obtinuerit, ſi punctum A venerit in u, jamque in puncto V reperiatur, ſequenti tempore æquali, linea per æqualem axis portionem C Q delapſa, & in Q K poſita, punctum A translatum eſſe in d, ſpatio u d tranſacto, adeòque in ſitu D reperiri concipiendum eſt, ſequenti adhuc tempore, quo linea percurrerit ſpatium Q F, & in F M collocata ſit, punctum ex d in l promotum, atque in ipſo L puncto conſiſtere intelligetur, ſpatiis A u, ud, dl, cæteriſq; deinceps decreſcentibus in ratione B A ad C V; evidens

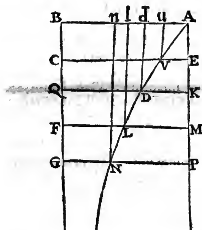
dens enim est motum ex utroque compositum fore in eadem curva A V D L N, quam priùs determinavimus.

6 Cæterùm constat curvam A V N hac motuum compositione descriptam axi B F continuò propriorem fieri, prout punctum A versùs B semper fluere, & ad ipsum accedere intelligitur, nec tamen evenire posse aliquando, ut cum ipso axe conveniat, uno verbo, axem ipsi Logisticæ *Asymptoton* esse, quia crescente in infinitum axe B F per additionem æqualium partium, alia, & alia spatia multitudine infinita, semperque minora, & minora ipsi puncto A percurrenda remanent, antequam ad ipsum B perveniat, quod ideò numquam attingere poterit: seriei siquidem infinitæ A u, u d, d l, &c. in ratione A B ad C V, vel B u continuatæ ultimus terminus est punctum B, eò quòd, quum sit A B ad B u, ut A u ad u d, erit etiam A B ad priorum duarum differentiam A u, ut A u ad differentiam duarum posteriorum A u, u d; quare ex doctrina Progressionum Geometricarum, quam post Archimedis vestigia in Libro de dimensione parabolæ, primus recentiorum Torricellius idem argumentum tractans lemm. 27. & Cavallerius in ejusdem Scholio apud ipsum demonstrarunt, mox Gregorius à S. Vincentio, aliique deinceps fusiùs illustrarunt, erit ipsa A B summa progresionis terminorum A u, u d, d l, &c. in dicta ratione continua decrescentium; nec vacat id particulariùs demonstrare, quum vel ex ipsa prima descriptione curvæ *num.* 2. adducta simpliciùs longè innotescat hæc ipsa Logisticæ affectio, quòd scilicet ad axem tanquam asymptota propiùs accedat, quàm quodlibet datum intervallum, nec tamen cum ipso conveniat; continuatio quippe rationis A B ad C V per minores, ac minores terminos in infinitum fieri potest, quin umquam minimus ejusmodi terminorum reperiatur, aut aliquis omnium ultimus fingi queat.

7 Sed & eadem ratione liquet, Logisticam D V A in immensum supra ipsam B A continuari posse, nec umquam ad certum aliquod curvæ hujus initium, ac veluti verticem, supremumque ejus punctorum fontem perveniri, sed varia dumtaxat ejus segmenta per ordinatarum aliquam, veluti A B, vel C V abscissa exhiberi, nec magis punctum A, quàm V, vel D,

aut

aut aliud quodvis pro Logisticæ capite statui posse : unde & perinde esse undecumque incipias, ratio enim ordinatarum B A, & C V tam benè ad majores terminos, quàm ad minores continuari potest, & ideò applicatis infinitis ejusmodi terminis successivè majoribus, & supra B A in immensum crescentibus, ad partes ipsius axis F B, ultra B producti, longitudine æquales prioribus B C, C Q &c. itaut per ordinem arithmeticè crescant axis portiones, geometricè crescentibus ordinatis, eadem curva ad superiores partes in immensum continuabitur per applicatas datam quamlibet magnitudinem excedentes, non minùs quàm ad inferiores in infinitum produci queat per applicatas qualibet magnitudine data minores.




8 Illud etiam intereà animadvertisse juvabit, duplici alio motu eamdem curvam intelligi posse descriptam, si videlicet imaginemur, puncto A per A P æquabiliter descendente, (vel musca, aut formica per hastam A P similiter æquabili motu delata, ut & P. de Chales in logarithmis tradendis supponit) ipsam interim A P, lineæ B A perpendiculariter insistentem, sibi æquidistanter versùs B promoveri, ac subinde in u V, d D, l L, &c. reperiri, spatiis A u, u d, d l, &c. in eadem ratione ge-

geometrica decrescentibus, prout arithmeticè crescunt spatia A E, A K, A M, &c. à puncto æquabiliter descendente percursa; sic enim punctum A subinde reperietur in punctis V, D, L, N, &c. resque eodem recidere observabitur, si ad superiùs dicta *num.* 5. attendamus, unde ulterioris explicationis molestiæ parcendum erit; quemadmodum & ejusdem tædii compendio consulentes missam facere decrevimus ( mysterii plenissimam) eorumdem motuum inversam compositionem, qualis haberetur, si axis B F ab ipsa tota æternitate motu infinitè tardo per B A motus intelligeretur, ita tamen accelerato celeritatis gradu, ut integra spatia, quæ in fine æqualis cujuscumque temporis particulæ transacta forent, veluti B n, B l, B d, Bu, B A essent in continua proportione geometrica, puncto aliquo intereà æquabiliter ascendente per eumdem axem B F, itaut post emensum infinito tempore infinitum spatium infra G positum subinde æqualibus tēporibus ad G F Q C B ascenderet, perque hanc motuum compositionem reperiretur ex ordine in N L D V A; aut si æquabilis motus ab æterno inchoatus refunderetur in lineam G P versùs B A ascendentem, acceleratus verò in punctum G, vel B per eamdem lineam versùs P, vel A promoti, itaut quolibet æquali tempore spatia percurreret geometricè proportionalia majora, ac majora n l, l d, d u, u A post emensos similiter motu infinite tardo in tota æternitate singulos minores, ac minores ejusdem progressionis terminos per ordinem acceptos, itaut subinde in iisdem punctis N L D V A reperiatur, &c.

9 Aliud potius Logisticæ, seu Logarithmicæ lineæ genus, de quo infra nonnulla dicenda recurrent, exponere hac occasione non gravabor. Illa ad modum spiralis cujusdam generari intelligitur, radio circuli per circumferentiam æquabiliter moto, dum punctum quoddam ab extremo radii versùs centrum motu in geometrica proportione retardato procurrit, ita ut quidquid præstat axis Logisticæ B F in curva superiùs exposita, id in spirali, de qua loquimur, præstet circuli peripheria in arcus æquales divisa; quod verò præstabant ibi ordinatæ B A, C V, Q D, &c. geometricè proportionales, id in præsenti efficiant radii à centro ad hujus spiralis puncta exporrecti.

cti. Itaque in hujus diagrammatis fig. 1. vel 3. expofito quovis circulo C A F f, determinatifque quotlibet æqualibus arcubus A F, F f, f f, ponantur radiorum correfpondentium pornes C A, C a, C a geometricè proportionales; erunt puncta A, a, a, in curva *Spirali Logiftica*, aliis *Spiralis Logarithmicæ*, quibufdam *Spiralis Geometricæ* nomine appellata, quæ pariter ad infinitos gradus extendi poffet, fi fingerentur radiorum ejus rationes non tantùm in fimplici, fed & in multiplicata, aut fubmultiplicata qualibet arcuum abfciflorum ratione crefcere, prorfus ut de prima Logiftica dictum eft fuprà *num.* 4. fed enim in prima hujus fpiralis fimpliciffima fpecie fiftimus, nec aliis pronunc implicamur.

10 Et quidem hìc pariter, fi radii C A, C a fint ut numeri, arcus refpondentes F A, f A erunt ut Logarithmi, critq; prima hujus curvæ affectio, quòd ratio duorum quorumlibet radiorum ad rationem duorum quorumlibet aliorum fit, ut nuper indicavimus, in eadem proportione, in qua funt arcus binis quibuslibet radiis intercepti, prorfus ut de rationibus ordinatarum, deq;partibus axis in prima Logiftica acceptis fupra dicebatur *n.* 3. Unde & conftat Spiralem Logifticam utrinq;pariter in infinitum continuari poffe,tum ad majores, tum ad mino-

nores terminos continuata ratione radiorum crescentium, aut decrescentium circa centrum, circa quod per infinitos cincinnos hæc curva convolvetur, prout infinities repetentur arcus æquales, per quos distare debent radii illi proportionales, adeòque integræ circulationes numero infinitæ sibi invicem superponentur, centro intereà respectu curvæ quasi asymptoto sese habente, quippe ad illud magis, magisque accedent curvæ puncta intervallo minore quolibet dato, prout diminuentur proportionaliter radii, nec aliquando tamen in ipsum centrum desinent, quum ad minimum horum terminorum perveniri nõ possit: quæ res, ut patebit, curiosa contemplatione non vacat, (non minùs quàm si motuum, quibus describitur compositionem inversè consideres eo modo, quo in prima Logistica fieri posse jndicavimus sub finem *num.* 8.) manifestum est enim, totam, quanta esse possit, hujusmodi curvam per infinitos cincinnos infinitè multiplici gyro se circa centrum convolvẽtem, determinatæ rectæ lineæ longitudinem minimè excedere, longitudinem scilicet suæ tangentis A B usq; ad radio perpendicularem ex centro excitatam productæ; quod & ab aliis pridem observatum video, facilemque habet demonstrationem ex infra dicendis, *cap.* 5. *num.* 10.

11 Sed & illud per se propemodùm constat, atque ex præmissa hujus spiralis genesi sponte profluit, radios ad quodlibet ipsius curvæ punctum æquè inclinari, itaut constans, certus, & determinatus semper sit angulus C a A, quem quilibet radius cum curva ad easdem partes constituit; siquidem hoc spirali spatio in triangula infinitè parva æqualium ad centrum angulorum distributo, veluti se habent A C a, a C a, &c. constat illa similia fore, propter latera circa æquales angulos proportionalia, quapropter & alii anguli homologi æquales erunt; itaque si ponatur, punctum C esse Terræ centrum, in quod gravia collimant, quæratur autem curva (in suppositione perpendicularium, seu linearum directionis, non æquidistantium, ut physicè sumi solent, sed in centrum convergentium, uti revera esse censentur) in qua grave positum, & per quam delapsum, idem in quolibet puncto momentum retineat, respectu momenti, quod habet in perpendiculo, ita ut illud ad hoc

B (ubi-

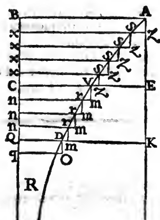
(ubicumque confiderentur) eamdem femper determinatam rationem obtineat, ea certè non alia effe poterit, quàm Spiralis hæc Logarithmica, cujus inclinatio ad radios a C (exprimentes veram gravium directionem, veraque perpendicula, in quibus momentum maximum, feu totale exercetur) num-

quam immutatur, fed femper eadem perfeverat, contra quàm faciat recta quælibet, velut A B, exhibens planum aliquod inclinatum, in quo pofitum grave (juxta rigorem geometricum perpendiculorum convergentium) non idem in quolibet puncto momentum habere poteft, nec eadem femper effe hujus momenti ratio ad momentum in perpendiculo [ut ut id re ipfa à Mechanicis fapienter affumatur, quippe in tanta à centro diftantia perpendicula quafi parallela habentur, aut rectæ illius portio cum Logifticæ Spiralis portione reipfa coincidit]ob varium inclinationis angulum ubique inconftantem, quem diverfa ejufdem rectæ puncta cum centro conjuncta conftituunt, unde & momentum ad fingula ferè puncta in rigore variari continget.

Poft hæc autem fcripta inveni & Celeberrimum Cartefium par. 1. Epiftolar. ep. 73. Merfenno jam indicaffe lineam, in qua momenta non variantur, effe quamdam fpiralem, rogatumque ut

ut ejus naturam indicaret, repoſuiſſe epiſt. ſequ. eam talem eſ-ſe, ut ejus tangentes ſint ad radios ubique æqualiter inclinatæ, & curvæ portiones radiis illas abſcindentibus eſſe proportionales; quod re ipſa Logiſticæ, ſeu Geometricæ Spirali convenit, ut monuimus.

12 Hæc eadem porrò Spiralis Logiſtica intelligi etiam poſ-ſet deſcribi per convolutionem primæ Logiſticæ, de qua ſupra loquuti ſumus, toto axe B Q in punctum centri contracto,




ipſa verò A K in peripheriam circularem radii B A ( repetito, ut opus fuerit, circumvolutionis gyro ) curvata, ſinguliſque ejus æqualibus partibus in pares arcus contortis, ordinatis intereà B A, C V, Q D in totidem radios à centro deductos abeuntibus, atque à parallelifmo ad convergentiam in idem centrum tranſlatis; uti viceversà primam Logiſticam per evolutionem hujus ſpiralis, rectificata circuli peripheria, & radiis ſeſe explicantibus, atque ad parallelum ſitum redeuntibus conformari quis concipere poſſet. Cave autem putes Logiſticam in Spiralem contractam ſpatium continere dimidium ejus, quod explicata complectebatur, eò quòd infinitè parva parallelogramma B z, x z, &c. ex quibus illa evoluta conſtabat, in totidem abeant triangula parallelogrammorum

 di-

dimidia, ex quibus Spiralis Logisticæ spatium absolvitur. Ejusmodi enim ratiocinium (ut ut celebrium Geometrarum methodo conforme) plerumque fallax esse deprehenditur, quia non eadem retinetur in convolutione dictorum triangulorum altitudo, quæ priùs fuerat parallelogrammorum, (quamquàm in certa ratione semper varietur) utì nec eadem basis, quæ enim priùs Curva Logistica infinita erat, in Spiralem Logisticam longitudine finitam convertitur; Unde circa Spiralis hujus Logistici Spatii dimensionem ea dumtaxat sunt attendenda, quæ infra *cap.* 7. *n.* 13. ex evidentioribus principiis generaliter deducemus. Atque hæc intereà, ad ingenerandam Tyronibus Logisticæ lineæ, de qua deinceps agendum erit, notitiam, prælibasse sufficiat.

Nunc quæ sint nobis ad mentem Hugenii demonstranda, allatis Clariss. Auctoris verbis, breviter indicabimus.



CA-

# CAPUT II.

*Logisticæ proprietates ab Hugenio propositæ. Spatiorum, sive ad axem, sive ad ejus parallelam ordinatis interiectorum, tum ad invicem, tum ad infinitum reliquum Logisticæ spatium proportio. Subtangentis longitudo semper eadem, & quæ. Trilineorum Logisticæ proportio. Infinitum Logisticæ spatium, cujus trianguli duplum. Cui rectangulo æqualia reliqua spatia. Solida ex infinito spatio Logisticæ circa axem, vel circa ordinatam revoluto, quam proportionem habeant ad conos inscriptos. Centrum gravitatis Spatii Logistici, in qua ab axe, & ab ordinatis distantia. Prædictorum solidorum gravitatis centra determinantur. Quomodo Logistica hyperbolæ tetragonismo conducat, & quam proportionem habeant hyperbolica spatia ad parallelogrammum quodlibet asymptotis inscriptum.*

IPsis Clarissimi Authoris verbis latinè redditis, Logisticæ proprietates referre placet, prout idem ipse nobis illas propositas voluit ad calcem suæ Diatribæ de *Causa Gravitatis*, ubi sic habet.

*Les proprietez de la Ligne Logistique, que i'ay promis de raporter, & dont quelques unes ont servi à trouver ce que i'ay remarque' touchant les movemens à travers l'air, sont les suivantes; outre la premiere, que i'ay desia indiquèe, de la*

Proprietates Lineæ Logisticæ, quas referre promisimus, & quarum nonnullæ iis investigandis deservierunt, quæ circa gravium motus per aerem superiùs adnotavimus, sequentes sunt; præter jam indicatam, proportionalitatis or-

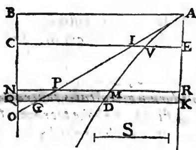
*proportionalitè des ordonnèes à l' asymptote, quand elles sont egalement distãtes, par la quelle ont trouve des points dans cette ligne.*

1 *Que les espaces compris entre deux ordonnèes à l'asymptote, sont entre eux comme les differences de ces ordonnèes. Ainsi dans cette figure, ou AVD est la Logistique, BO son Asymptote, & les ordonnèes AB, VC, DQ, dont ces dernieres, estant continuèes rẽcontrent AK parallele à l'Asymptote en E, K; les espaces ABCV, ABQD, sont entre eux, comme les droites EV, KD.*

2 *Que les mesmes choses estant posèes, & AO estant la tangente au point A, la quelle coupe CE, QK, en I, & G; les espaces AVE, ADK sont entre eux, comme les droites VI, DG.*

ordinatarum ad asymptoton, quando æqualiter distãt, cujus beneficio plura hujus lineæ puncta reperiri possunt.

1 Quòd spatia comprehensa inter duas ad asymptoton ordinatas sunt inter se, ut earumdem ordinatarum differentiæ. Sic in præsenti figura, ubi AVD Logistica est, BO




ejusdem Asymptotos, & ordinatæ AB, VC, DQ, quarũ duæ postremæ continuatæ cõveniunt cum AK ipsi Asymptoto parallela in E, K; spatia ABCV, ABQD sunt inter se, ut rectæ EV, KD.

2 Quòd iisdem positis, & AO curvam tangente ad punctum A, quæ secet ipsas CE, QK in I, & G; spatia AVE, ADK inter se sunt, ut rectæ VI, DG.

3 Quod

*3 Que l'espace compris entre deux ordonnèes, est à l'espace infini, qui, depuis la moindre de ces ordonnèes, s'etend entre la Logistique, & son Asymptote, comme la difference des mesmes ordonnèes est à la moindre. Quand ie dis, que l'espace infini à une certaine raison à un'espace fini, cela signifie qu'il aproche si près de la grandeur d'un espace donnè, qui à cette proportion à l'espace fini, que la difference peut devenir moindre qu'aucun espace donnè. Dans la figure precedente l'espace A B Q D est à l'espace infini, qui depuis D Q s'ètend entre la courbe, & l'asymptote, comme KD à DQ.*

*4 Que la soutangente, comme BO dans la mesme figure, est tousiours d'une mesme longueur, à quelque point de la Logistique que la tangente apartiene.*

*5 Que cette longueur se trouve per aproximation, & qu'elle est à la partie de l'asymptote, comprise entre les ordonnèes de la raison double, cōme* 434294481903251804 *à* 301039995663981195 *; ou bien pres, comme* 13 *à* 9.

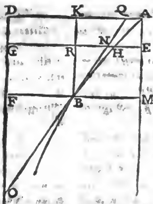
3 Quòd spatium duabus ordinatis interjectum est ad infinitum spatium, quod post minorem harum ordinatarum exporrigitur inter Logisticā, & ejus Asymptoton, ut differentia earumdem ordinatarū est ad minorem. Quum porrò dicimus infinitum spatium ad quoddam finitum in quadam ratione esse, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum spatium, quod finito illi spatio in dicta ratione respondeat, ut differentia minor evadere possit qualibet magnitudine data. In præcedenti figura spatium A B Q D est ad infinitum spatium, quod post QD, curvæ, & asymptoto interiicitur, ut KD ad DQ.

4 Quòd subtangens, velut BO in eadem figura, ejusdem semper est longitudinis, ad quodcumque Logisticæ punctum tangens pertineat.

5 Quod hæc longitudo per aproximationem reperitur, estque ad partem asymptoti interceptam ordinatis duplæ proportionis, ut 434294481903251804 ad 301039995663981195, seu proximè, ut 13 ad 9.

*6 Que s'il y a trois ordonnées, comme dans cette figure sont AD, HG, BF, & que du point de la courbe, apartenant à la moïdre, on mène une paralle le à l'asymptote, qui coupe les deux autres ordonnées en R, & K, & une tangente BQ, qui les coupe en N, & Q; les espaces trilignes ABK, HBR sont entre eux, comme les parties des ordonnées entre la courbe, & la tangente, sçavoir comme AQ, HN.*

*7 Que l'espace infini entre une ordonnée, la Logistique, & son Asymptote du costé, que ces deux dernieres vont en s'approchant, est double du triangle, que font l'ordonnée, la tangente menée du mesme point que*




6 Quòd si fuerint tres ordinatæ, velut in hac figura se habent AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam pertinente ducatur asymptoto parallela, secans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ easdem secans in N, & Q; spatia trilinearia ABK, HBR sunt inter se, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, scilicet ut AQ, HN.

7 Quòd spatium infinitum inter ordinatam, Logisticam, & asymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum est trianguli comprehensi ordinata, tangente ad idem ordinatæ punctum, ac subtangen-

*l'ordonnèe, & la soutangente. Ainsi, dans la mesme figure, l'espace infini, depuis l'ordonnèe B F, est double du triangle B F O.*

8 *Que l'espace, compris entre deux ordonnèes, est ègal au rectangle de la soutangente, & de la difference des mesmes ordonnèes. Ainsi, dans la mesme figure, l'espace A D F B est egal au rectangle de la soutangente F O, & de K A.*

9 *Que le solide que fait l'espace infini depuis une ordonnèe, en tournant autour de l'asymptote, est sesquialtere du Cone, dont la hauteur est egale à la soutangente, & le demidiametre de la base egal à la mesme ordonnèe. Ainsi le solide que fait l'espace infini B F O C, en tournant autour de F O, est sesquialtere du Cone que fait le triangle B F O, en tournant autour de le mesme F O.*

10 *Que le solide produit par le mesme espace infini, en tournant autour de l'ordonnèe B F, depuis laquelle il commence, est sextuple du Cone, que fait le triangle B F O, par sa conversion sur B F. De laquelle mesure des solides il s'ensuit.*

11 *Que le centre de gravitè de l'espace infini, depuis une or-*

gente. Sic in eadem figura spatium infinitum post ordinatam B F duplum est trianguli B F O.

8 Quòd spatium duabus ordinatis interjectum æquale est rectangulo subtangentis in differentiam earumdem ordinatarum; sic in eadem figura spatium A D F B æquatur rectangulo subtangentis F O in K A.

9 Quòd solidum productū ab infinito spatio post aliquam ordinatarum in conversione circa asymptoton, est sesquialterum Coni, cujus altitudo æquetur subtangenti, basis verò semidiameter ordinatæ par fuerit. Ita solidum genitū ab infinito spatio B F O C in conversione circa F O sesquialterum est Coni geniti ex triangulo B F O circa eamdē F O revoluto.

10 Quòd solidū productum ab eodem infinito spatio in conversione circa ordinatam B F, post quam exporrigitur, sextuplum est Coni geniti ex triangulo B F O in conversione circa B F. Ex qua quidem solidorum mensura consequitur.

11 Quòd centrum gravitatis infiniti spatii post unam

*donnée, est distant de cette ordonnée, de la longueur de la soutangente.*

12 *Que ce mesme centre de gravité est distant de l'asymptote, du quart de l'ordonnée.*

13 *J'avois aussi trouvé, que le centre de gravité du premier des dits solides infinis, est distant de sa base, de la moitié de la soutangente.*

14 *Et que le centre de gravité de l'autre solide est distant de sa base infinie, d'une huitiéme de son axe.*

15 *On sçait assez, que cette ligne Logistique sert à la Quadrature de l'Hyperbole, depuis les demonstrations du P. Gregoire de Saint Vincent, touchant les espaces Hyperboliques com-*

ordinatarum, distat ab hac ordinata longitudine subtangentis.

12 Quòd idem gravitatis centrum distat ab asymptoto per quadrantem ordinatæ.

13 Reperimus etiam, quòd centrum gravitatis primi ex dictis solidis infinitis distat à sua basi per semissem subtangentis.

14 Et quòd centrum gravitatis alterius solidi distat ab ejus infinita basi per octantem sui axis.

15 Notum jam est, hanc Logisticam lineam Tetragonismo Hyperbolæ deservire post demonstrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa Hyperbolica spatia duabus ad alte-

*pris entre deux ordonnées sur une des asymptotes. Et que s'il y a deux tels espaces, dont les ordonnées de l'un soient comme A D à H G dans la derniere figure; & les ordonnés de l'autre comme B F à C E; ces espaces seront entre eux comme les lignes D G à F E. Mais on n'a point remarqué, que je sçache, que ces mesmes espaces Hyperboliques sont au Parallelogramme de l'Hyperbole (j'appelle ainsi le parallelogramme dont les costez sont les deux ordonnées sur les asymptotes, tirées d'un mesme point de la Section) comme chacune des lignes D G, F E, à la soutangente F O. De sorte que, si le Parallelogramme de l'Hyperbole est supposé de 0,4342944819 parties, chaque espace Hyperbolique, compris entre deux ordonnées à une des asymptotes; sera à ce parallelogramme, comme le Logarithme de la proportion des mesmes ordonnées, c'est à dire comme la difference des Logarithmes, des nombres qui expriment la proportion des ordonnées, au nombre 0,4342944819; en prenant des Logarithmes de 10 characteres outre la characteristique.*

*Et d'icy il est aisé de verifier la Quadrature de l Hyperbole*

teram asymptoton ordinatis interjecta; quòdq; si duo fuerint hujusmodi spatia, in quibus ordinatæ unius sint, ut A D ad H G in postrema figura, & ordinatæ alterius, ut B F ad C E, hæc spatia erunt inter se, ut lineæ D G, & F E. Nondum autem, quod sciam, innotuit, hæc ipsa spatia hyperbolica esse ad parallelogrā-mum hyperbolæ (sic voco parallelogrammum, cujus latera sint duæ ad utramque asymptoton ordinatæ ex eodē puncto Sectionis ductæ) ut unaquæq; linearum D G, F E est ad subtangentem F O. Adeò ut, si parallelogrammum hyperbolæ suponatur partium 0, 4342944819, quodlibet hyperbolicum spatium duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjectum erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet ut differentia Logarithmorū respondentium numeris exprimentibus proportionē ordinatarum, ad numerum 0, 4342944819; acceptis Logarithmis decem notarum ultra caracteristicam.

Atque hinc facile est veritatem ostēdere Tetragonismi

*que j'ay données dans le Traité de l'Evolution des Lignes Courbes; qui est dans mon* Horologium Oscillatorium.

Hyperbolici abs me propositi in tractatu de Evolutione Curvarum, quem *Horologio Oscillatorio* insertum invenies.

Hactenus Viri Clarissimi æquè, ac Doctissimi Theoremata perinde nova, atque admirabilia: nunc ad eadem demonstranda accedamus.

## CAPUT III.

*Primo Theoremate proposito, ostenditur aggregata quotlibet geometricè proportionalium à minimo esse inter se, ut differentiæ terminorum maximi, & minimi. Incommensurabiles magnitudines per ablationē quantitatis minoris qualibet data reddi commensurabiles. Hinc primi Theorematis Hugeniani demonstratio more Archimedeo. Spatia Logistica æquè alta sunt inter se, ut homologæ ordinatæ, spatia quoque infinitè longa sunt, ut bases. Quodvis spatium ad subsequens infinitum est, ut differentia suarum ordinatarum ad minorem. Hinc secunda ejusdem primi Theorematis demonstratio.*

A Primo igitur Theoremate Clarissimi Hugenii auspicantes, rem ipsam propiùs attingamus. Illud, ut vidimus, est: *Quòd spatia comprehensa inter duas ad asymptoton ordinatas sunt inter se, ut earundem ordinatarum differentiæ.* Sic in

pra-

*præsenti figura, ubi AVD Logistica est, BO ipsius asymptotos, & ordinatæ AB, VC, DQ, quarum duæ postremæ continuatæ conveniunt cum AK ipsi asymptoto parallela in E, K; spatia*

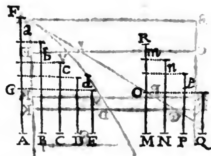



*ABCV, ABQD sunt inter se, ut rectæ EV, KD.* Quod ut demonstremus duo omnino sunt præmittenda primæ demonstrationi, alterum circa aggregata terminorum proportionalium, alterum de lineis incommensurabilibus; quamquàm enim primum ex Torricellii flexilineis, ejusve lemm. 28. de dimensione parabolæ facilè deduci potest, secundum verò expresè à Cavalerio exercit. 6. prop. 24. demonstratum fuerit, malui tamen demonstrationes meas per extensum afferre, ne Lector, libris illis fortè ad manum non occurrentibus, in horum Theorematum demonstratione hæsitare possit, sed solis Euclideis, Conicisve ad summum elementis instructus, absque alio subsidio, omnia inoffenso pede percurrat; quod & aliàs infra observabimus; semel hìc monuisse sufficiat.

2 Dico igitur primò, quòd, si fuerit duplex series quotcumque terminorum in eadem ratione geometricè proportionalium, erit omnium aggregatum, minimo excepto, in prima serie, ad aggregatum omnium, pariter minimo excepto, in serie secunda, ut differentia maximi à minimo

pri-

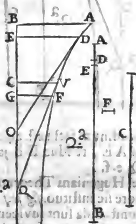
primæ ad differentiam maximi à minimo secundæ seriei: Sint enim magnitudines ejusmodi in prima serie A,B,C,D,E, quarum maxima A, minima E, utriusque differentia F G;




differentiæ autem singularum per ordinem à proximè minori sint a, b, c, d, utique simul sumptæ æquales ipsi F G extremarum. Sint pariter secundæ seriej magnitudines M,N,P,Q, quarum maxima M, minima Q, utriusque differentia R O similiter æqualis omnibus simul partialibus differentiis duarum quarumlibet sibi succedentium, quas notant litteræ m,n,p; sintque in eadem ratione continuè proportionales tum quæ in prima serie, tum quæ in secunda reperiuntur. Dico A B C D simul ad M N P simul sumptas esse, ut F G ad R O; cùm enim sint A, B, C, D, E, continuè proportionales, erunt in eadem ratione proportionales earumdem differentiæ a, b, c, d; atque ut una A ad unam a, ita omnes A B C D simul ad totidem a b c d simul sumptas, idest ad ipsam F G iis omnibus æqualem: eadem ratione ostendetur, ut una M ad unam m, ita omnes M N P ad omnes m n p, sive ad R O ipsis æqualem; est autem ut A ad a, ita M ad m, quoniam supponitur esse A ad B, ut M ad N; igitur ut A B C D ad F G, ita M N P ad R O, & alternando ut summa terminorum primæ seriei excepto ultimo ad summam terminorum posterioris ultimo pariter excepto,

pto, ita F G differentia primi ab ultimo in prima serie ad R O differentiam primi ab ultimo in serie secunda. Q. e. d.

3 Dico secundò duarum incommensurabilium magnitudinum majorem posse minori commensurabilem reddi, ablata magnitudine minori qualibet data. Sunto enim in fig. 2. hujus diagrammatis duæ ejusmodi quantitates incommensurabiles, A B major, & C minor; quælibet autem magnitudo proposita A E quantùmvis parva; dico posse ex majori A B auferri quantitatem, puta A D, minorem assignata A E, itaut residuum D B sit jam ipsi C commensurabile; nam bifariam




divisa C, ac rursus subdivisa qualibet ejus medietate, patet fore ut jam deveniamus ad aliquam ejus partem F minorem data magnitudine A E: multiplicetur itaque F, quousque fiat proxime major ipsa B E, & aggregatum ex F toties accepta sit B D, patet B D minorem fore ipsa B A, quia B D ad summùm superabit E B quantitate F, juxta constructionem, minori quàm sit A E, aut plerumque nec integra quantitate F, sed ejus aliqua portione multò magis minori ipsa A E; itaque B D minor est, quàm B A, defectu A D minori quàm sit proposita magnitudo A E; sed & eadem B D ipsi C commensu-

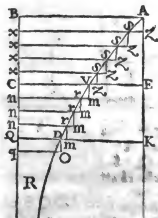
ra-

rabilis est, habens cum ipsa mensuram communem F, ex qua pluries repetita consurgit; igitur ex majori A B duarũ in com-

mẽsurabilium magnitudinum facta est ablatio partis A D minoris data quantitate A E, residua D B jam commensurabili ipsi C remanente. Q. e. f.

4 Jam libero pede Hugeniani Theorematis demonstrationem Archimedeo more sic instituo. *fig seq.* Spatiorũ A B C V, A B Q D (quæ demonstranda sunt invicem esse, ut V E, D K) altitudines B C, B Q vel commensurabiles sunt, vel incommensurabiles. Sint primùm commensurabiles, mensura B x utrique communiter inserviente, distributoque axe B G, & residuo C Q in particulas ipsi B x æquales, ac ductis ordinatis, fiant parallelogrãma æquè alta B z, x z, &c. usque ad C m circumscripta spatio B C V A, quorum ultimum C m illi penitus extrinsecum remanet, continueturque eadem parallelogrammorum æquè altorum series per reliquum spatium C V D Q, cui pariter circumscripta sint l m, n m, &c. usque ad Q O, quod toti spatio extrinsecum pariter erit. At si mensura B x non satis ad propositum exigua fuerit, poterit illa, & sequentes portiones ipsi æquales, bifariam dividi, ac rursus bi-

bifariam, multiplicatis parallelogrammis hæc ſpatia circumſcribentibus, quouſque excedant eadem ſpatia minori exceſſu quolibet dato, ſiquidem ille exceſſus minor ſemper erit primo parallelogrammo Bz, quod (diminuta ejus latitudine) minus eſſe poteſt quavis propoſita quantitate; erunt autem hæc parallelogramma æquè alta, ut baſes, nempe ut ordinatæ in Logiſtica paribus intervallis diſſitæ, adeòq; erunt, ex primaria Logiſticæ affectione *cap.* 1. *num.* 2. relata, in continua proportione, unde ex primo aſſumpto noſtro *num.* 2. hìc probato, aggregatum omnium parallelogrammorum circumſcriptorum ſpatio



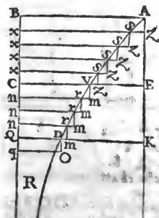

ABCV, præter minimum toti ſpatio extrinſecum Cm, ad aggregatum omnium circumſcriptorum ſpatio ADQB, excluſo pariter minimo QO, erit ut differentia Bz à Cm, ſcilicet ut mVE, ad differentiam ejuſdem Bz à QO, ideſt ad ODK, atque adeò ut VE ad DK. Quoniam igitur ſeries parallelogrammorum ejuſmodi ſpatia circumſcribentiū ſemper, quantacumque fuerit ipſorum multitudo, & quantumcumque accedant ad ipſamet ſpatia, inveniuntur eſſe in ratione conſtanti VE ad DK, patet utique Viris Archimedeis & ipſamet Logiſtica ſpatia iis parallelogrammorum feriebus inſcripta, nempe AVCB, & ADQB in eadem eſſe ratione VE ad DK.

rabilis est, habens cum ipsa mensuram communem F, ex qua pluries repetita consurgit; igitur ex majori A B duarũ in com-

mẽsurabilium magnitudinum facta est ablatio partis A D minoris data quantitate A E, residua D B jam commensurabili ipsi C remanente. Q. e. f.

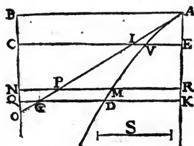
4 Jam libero pede Hugeniani Theorematis demonstrationem Archimedeo more sic instituo. *fig seq.* Spatiorũ A B C V, A B Q D (quæ demonstranda sunt invicem esse, ut V E, D K) altitudines B C, B Q vel commensurabiles sunt, vel incommensurabiles. Sint primùm commensurabiles, mensura B x utrique communiter inserviente, distributoque axe B G, & residuo C Q in particulas ipsi B x æquales, ac ductis ordinatis, fiant parallelogrãma æquè alta B z, x z, &c. usque ad C m circumscripta spatio B C V A, quorum ultimum C m illi penitus extrinsecum remanet, continueturque eadem parallelogrammorum æquè altorum series per reliquum spatium C V D Q, cui pariter circumscripta sint l m, n m, &c. usque ad Q O, quod toti spatio extrinsecum pariter erit: At si mensura B x non satis ad propositum exigua fuerit, poterit illa, & sequentes portiones ipsi æquales, bifariam dividi, ac rursus bi-

bifariam, multiplicatis parallelogrammis hæc ſpatia circumſcribentibus, quouſque excedant eadem ſpatia minori exceſſu quolibet dato, ſiquidem ille exceſſus minor ſemper erit primo parallelogrammo Bz, quod (diminuta ejus latitudine) minus eſſe poteſt quavis propoſita quantitate; erunt autem hæc parallelogramma æquè alta, ut baſes, nempe ut ordinatæ in Logiſtica paribus intervallis diſſitæ, adeòq; erunt, ex primaria Logiſticæ affectione *cap.* 1. *num.* 2. relata, in continua proportione, unde ex primo aſſumpto noſtro *num.* 2. hìc probato, aggregatum omnium parallelogrammorum circumſcriptorum ſpatio




ABCV, præter minimum toti ſpatio extrinſecum Cm, ad aggregatum omnium circumſcriptorum ſpatio ADQB, excluſo pariter minimo QO, erit ut differentia Bz à Cm, ſcilicet ut mVE, ad differentiam ejuſdem Bz à QO, ideſt ad ODK, atque adeò ut VE ad DK. Quoniam igitur ſeries parallelogrammorum ejuſmodi ſpatia circumſcribentiũ ſemper, quantacumque fuerit ipſorum multitudo, & quantumcumque accedant ad ipſamet ſpatia, inveniuntur eſſe in ratione conſtanti VE ad DK, patet utique Viris Archimedeis & ipſamet Logiſtica ſpatia iis parallelogrammorum ſeriebus inſcripta, nempe AVCB, & ADQB in eadem eſſe ratione VE ad DK.

5 Sint jam altitudines B C, B Q incommensurabiles; poterit, ex secundo assumpto nostro *num.* 3. hic demonstrato, sumi B N deficiens à B Q quantitate N Q minori qualibet data, commensurabilis verò existens ipsi B C; quomodo, ordinata N M R, habebit spatium A V C B ad A M N B eamdem rationem, quam V E ad M R, argumento proximè allato id concludente. Si igitur major esse dicatur ratio A V C B ad A D Q B, quàm ratio linearum V E, & D K, poterit ipsa M R tam proxima esse ipsi D K, & tam parùm ab ipsa deficere, ut ratio dictorum spatiorum sit adhuc major, quàm ratio lineæ V E ad M R, hoc est quàm ratio spatii primi A V C B

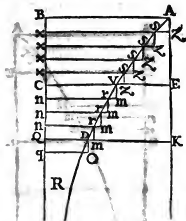



ad A M N B, atque adeò foret A D Q B minus quàm A M N B, quod est absurdum; si verò minor esse dicatur ratio dictorum spatiorum, quàm linearum illis, ut supra, respondentium, poterit nihilominus linea N M tam proxima esse ipsi Q D, & spatium A M N B tam parùm deficere ab ipso A D Q B, ut ratio A V C B ad A M N B, hoc est ratio V E ad M R adhuc minor sit, quàm ratio V E ad D K, atque adeò M R major foret ipsa D K, quod pariter est absurdum; Æqualis igitur est ratio A V C B ad A D Q B rationi V E ad D K. Q. e. d.

6. Aliam adhuc expeditionem fortasse ejusdem Theorematis demonstrationem subjungemus, his aliis præmissis, quæ demonstrasse in sequentibus non pigebit: & primò notare juvat duo quælibet spatia Logistica æquè alta, juxta in-

di-

divisibilium methodum, ostendi esse ad invicem, ut sunt Homologæ utriusque ordinatæ; nimirum pari existente altitudine B C, C Q; spatium B A V C ad C V Q D erit, ut B A ad C V, vel C V ad Q D; sumpta enim ubivis B x æquali C n,

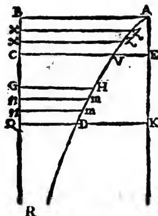



& ordinatis x S, n r, erit ex natura curvæ, ut B A ad x S, ita C V ad n r, & alternando, ut B A ad C V, ita x S ad n r; & hoc semper; ergo ut una ad unam, ita omnes ad omnes, nempe ut B A ad C V, ita spatium B A V C ad C V D Q; quod erat, &c. Neque refert sint, ne hæc spatia conjuncta, sibique immediatè succedentia, an prorsùs disjuncta, vel ex parte communicantia, eadem quippe ratio, ut constat; perinde obtinet.

7 Deinde observare oportet, spatia post quamlibet ordinatam in infinitum producta esse ad invicem, ut sunt ipsæ ordinatæ, seu bases talium spatiorũ; sic D A B Q R, & D V C Q R, ex parte R utraque interminata, & infinitè longa, sunt ad invicem, ut B A, & C V. Id sanè constat, tum quia infinita B Q R, & infinita C Q R sunt æquales, quum differant finita longitudine B C nullam rationem habente ad ipsarum utramlibet, quare ex dictis numero præcedente spatia iis adjacentia sunt, ut ordinatæ A B, C V; tum etiam exactiùs sic.

 Di-

Diviso interminato spatio D A B Q R in infinita spatia æquè alta B V, C H, G D, &c. similiter & spatio D V C Q R in infinita ejusdem altitudinis spatia C V H G, G H D Q, &c: erunt utrobique, ex supra demonstratis in *præcedenti numero*,




spatia illa æquè alta, ut suæ ordinatæ, adeòq; in geometrica progressione; omnes igitur termini B V, C H, &c. ad omnes C H, G D, &c. in infinitum continuatos erunt, ut primus terminus B V ad primum C H, ex 12. v. elem. aut ex 29. lemmate Torricellii de dimensione parabolæ aliàs citato; adeòque erunt, ut B A ad C V. Quod e. d.

8 Hinc ultrò profluit tertium Cl. Authoris Theorema, quòd spatium duabus ordinatis interjectum est ad infinitum spatiũ, quod post minorem illarũ exporrigitur, ut differentia utriusq; ordinatæ ad minorem ipsarum; quia enim D A B Q R ad D V C Q R est, ut B A ad C V, igitur dividendo A V C B ad subsequens interminatum spatium post C V est, ut E V ad V C, & similiter A D Q B ad interminatum spatium post Q D est, ut K D ad D Q.

9 Alia igitur primi hujus Theorematis demonstratio sic instituenda erit; spatium A B C V ad interminatum V D R Q C est

eſt, ex *num. præcedenti*, ut EV ad VC; & VDRQC ad interminatum DRQ ex *num.* 7. eſt, ut VC ad QD; denique DRQ ad DVCQ ex *num. præced.* & convertendo eſt, ut QD ad DK; igitur ex æquo AVCB ad CVDQ eſt, ut VE ad DK. Q. e. &c.

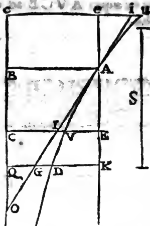


# CAPUT IV.

*Ad ſecundum Hugenii Theorema demonſtrandum, quæ ſit Logiſticæ parameter oſtenditur, & quomodò æqualis ſit ſubtangenti. Poſt demonſtrationem ſecundi Theorematis ad quartum proceditur, quo demonſtrato, determinatoque rectangulo æquali ſpatio Logiſticæ infinitè longo, exponitur Auctoris circumſpecta loquutio de ratione infiniti ſpatii ad finitum, ac familiaribus exemplis ſuadetur infinitè longa ſpatia determinatæ quantitati æqualia eſſe poſſe. Spatia per varias rationis ordinatas in Logiſtica abſciſſa quam proportionem habeant; regula ad dignoſcendum quando ſpatia infinitè longa, aut infiniti termini finitam aggregent quantitatem, quando verò infinitam.*

In

IN secundo Theoremate; *Iisdem positis*, inquit Auctor, *& A O curvam tangente ad punctum A, quæ secet ipsas C E,*




*Q K in I, & G; spatia A V E, A D K sunt inter se, ut rectæ V I, D G*. Quod pariter ut demonstretur determinanda priùs est Logisticæ, ut ipse appellare soleo, *Parameter*; hæc autem ejusmodi est.

2 Exponatur linea S, quæ cum quavis ordinata inter Logisticam, & axi parallelam, veluti cum V E, contineat rectangulum æquale spatio A V C B, adjacenti eidem curvæ ad partes axis; manifestum est, quòd eadem constans linea S continebit cum quavis alia simili ordinata D K rectangulum æquale spatio correspondenti A D Q B; cùm enim ex primo Theoremate spatia V A B C, D A B Q sint, ut rectæ V E, D K, seu, ob communem altitudinem S, ut rectangulum ex S in V E ad aliud ex S in D K, ubi spatium V A B C suppositum fuerit æquale rectangulo S in V E, spatium pariter D A B Q æquale erit rectangulo ex eadem S in D K; itaque non incommodè linea S, Logisticæ *Parameter* deinceps appellari poterit, eò quòd sit linea, juxta quam ipsæ V E, D K possunt spatia Logisticæ adjacentia A V C B, A D Q B.

3

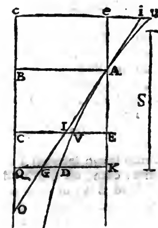
3 Ostendemus autem hanc Parametrum Logisticæ subtangenti, idest axis portioni inter ordinatam B A, & tangentem A O interceptæ, semper æqualem esse, itaut, posita B O æquali ipsi S, juncta O A curvam tangat in A. Sumpto enim in O A quovis puncto I supra, vel infra A, ordinataque C I V, occurrente axi in C, curvæ in V, axi parallelæ A K in E: erit, ob similitudinem triangulorum O B A, I A E, ipsa O B ad B A, ut A E ad E I; rectangulum igitur O B in E I æquale erit rectangulo B A E; sed spatium B A V C est, ex *numero præcedenti*, æquale rectangulo Parametri, idest ipsius O B in V E; ergo rectangulum B A E ad spatium B A V C est, ut recta I E ad E V; puncto autem i supra A existente manifestum est rectangulum B A e minus esse spatio B A u c, ergo tunc i e minor est, quàm e u; ob oppositam rationem, accepto puncto I infra ipsum A, erit rectangulum B A E majus spatio B A V C, unde & recta I E major ipsa E V; quare in utroque casu punctum I est extra curvam, & ipsa O A est tangens. Quod erat demonstrandum.

4 Hoc posito, demonstratio secundi Theorematis Hugeniani sic instituenda erit; cùm, ob similitudinem triangulorū O A B, G A K, sit O B ad B A, ut A K ad G K, erit rectangulum ex O B in G K æquale rectangulo B A K Q, sed O B in D K jam æquatur spatio A D Q B, ex supradictis; igitur reliquum rectangulum ex O B in D G æquatur residuo spatio D A K. Similiter ostendetur, rectangulum ejusdem O B in V I æquari spatio A E V; igitur ut prædicta rectangula, sive ut eorum bases D G, V I, ita spatia ipsa D A K, V A E; quod erat demonstrandum.

5 De tertio Hugenii Theoremate, quod est; *Spatium duabus ordinatis interjectum esse ad spatium infinitum, quod post minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logisticam, & ejus Asymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum est ad minorem; nempe in præcedenti figura spatium A B Q D esse ad spatium infinitum, quod post minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logisticam, & ejus Asymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum est ad minorem, idest in præcedenti figura, spatium A B Q D esse ad spatium infinitum, quod post Q D* in-

*inter curvam, & asymptoton interjicitur, ut KD ad DQ*; de hoc, inquam, Theoremate non est quòd simus solliciti, quùm ejus veritas jam innotuerit ex dictis *cap. praeced. num.* 8. ut nihil jam addendum supersit, nisi hoc quasi corollarium, scilicet.

6 Quòd spatium infinitum post quamvis Logisticae ordinatam QD curvae, & asymptoto interjectum, aequale sit rectangulo subtangentis, seu parametri BO in eamdem ordinatam;




nam, ut DK ad DQ, ita rectangulum ex BO in DK ad rectangulum ex BO in DQ, & ita etiam spatium ADQB ad ad infinitum spatium post QD exporrectum; quare quum rectangulum ex BO in DK sit, ex dictis, aequale spatio ADQB, etiam BO in DQ erit aequale spatio infinito post QD exporrecto.

7 Quae verò circumspectè ingerit Nobilissimus Auctor illis verbis: *Cùm porrò dicimus infinitum spatium ad quoddam finitum in certa ratione esse, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum spatium, quod finito illi spatio in dicta proportione respondeat, ut differentia minor evadere possit qualibet magnitudine data*. Non ita accipienda sunt, nec eò spectant certissimè, ut scrupulum movere videatur Cl. Author, num

num exacta æstimanda sit proportio, quam inter utrumq; spatium assignat; ex quo enim Torricellius infinitum solidum hyperbolicum in cylindrum æqualem determinatæ basis, & altitudinis commutare Geometras docuit, necnon infinitorum proportionalium terminorum series in unam summam colligere, jam extra dubium est magnitudinem una, vel altera dimensione infinitam (putà multitudine, licet non mole, si de quantitate discreta sermo sit, longitudine, licet non latitudine, si de spatiis superficialibus loquamur, aut longitudine, licet non crassitie, vel crassitie quidem, sed non longitudine, loquendo de solidis) ita reliquis dimensionibus ad absolutam ejus magnitudinem integrandam concurrentibus limitari posse, ut quantitatem prorsus finitam adæquet.

8 Neque in hoc relictum esse puto Geometris ambigendi locum, ut ut id Tyronibus propè incredibile videatur, qui admirationi, aut potius præjudicatæ, qua tenentur, opinioni paulatim deponendæ assuescent, si has fractionum series $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. in eadē ratione dupla decrescentes, aut $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ cæterasque decrescentes in ratione tripla, aliasve cujusvis rationis progressiones in infinitum minoribus, & minoribus terminis coalescentes in unam redigere summam attentaverint; cùmque experti fuerint, non posse tot sumi in prima serie, quæ umquam ad unitatem pertingant, eò quòd, in additione cujuslibet termini ad præcedentes, non additur quod ipsis deficit ad unitatem integrandam, sed semissis dumtaxat talis defectus, putà ad $\frac{1}{2}$ addendo $\frac{1}{4}$ additur semissis ejus, quod primo termino deficiebat ad unitatem, & alter semissis relinquitur, addendo autem duobus præcedentibus $\frac{1}{8}$ non additur quod in prima additione relictum fuerat, nempe quadrans unitatis, sed ejus quadrantis semissis, ideſt octans, altero octante relicto, qui defectus rursus non suppletur per sequētem additionem, quippe non additur octans relictus, sed ejus semissis, nempe $\frac{1}{16}$, atque ita porrò; nec posse tot sumi in serie secunda, quæ umquā unitatis semissem restituant, quia cùm primus terminus $\frac{1}{3}$ de-

ficiat per semissem sui, idest per $\frac{1}{4}$, à semisse unitatis, non resarcit quis illum defectum addendo $\frac{1}{9}$, quippe qui deficiat ab $\frac{1}{6}$ rursus per sui semissem $\frac{1}{12}$, hic verò non suppletur additione sequentis termini $\frac{1}{27}$ deficientis ab illo residuo $\frac{1}{18}$ rursùs per sui semissem, atque ita porrò semper procedendo. ita ut nihilominus ad hos limites, nempe ad unitatem in serie prima, & ad semissem unitatis in serie secunda, semper propiùs accedatur sumptis pluribus, & pluribus terminis ejusdem seriei, defectu semper decrescente infra quamlibet assignatam quantitatem (veluti in figuris plurium, & plurium laterum circulo, aut parabolæ, alterive curvo spatio inscriptis veterum more contingit) donec penitus in seriei fine evanescat: cùm id, inquam, experti fuerint, atque attenta meditatione rei hujus naturam contemplaverint, fateantur necesse erit, quòd si prorsus omnes illi infiniti termini simul acciperentur, præcisè forent in prima serie æquales unitati, in secunda serie unitatis semissi, in aliis alteri quantitati similiter determinandæ.

9 Utì autem in quantitate discreta, ita in continua (quæ semper in discretam dividi, & resolvi potest) idem obtinet; spatium quippe infinitè longum in spatia determinatæ longitudinis multitudine infinita resolvi potest, quæ poterunt semper minora, & minora esse, si latitudo proportionaliter decrescere intelligatur, itaut illa infinita spatia per ordinem correspondeant infinitis terminis alicujus geometricæ progressionis, utì certè correspondent spatia Logistica ad æquales axis portiones abscissa, utì ex dictis *præced. cap. num. 6.* colligitur; omnia ergo hujusmodi æquè alta spatia per infinitam Logisticæ longitudinem distributa, quum sint quædam series geometrica proportionaliter decrescentium terminorum in ratione, vel dupla, vel tripla, vel alia qualibet, prout extremæ ordinatæ cujuslibet æquè alti spatii in data ratione acceptæ fuerint, determinatæ magnitudini æqualia esse, prout in fractionibus contingit, nil prorsùs repugnat, imò vel ex hoc ipso, quod in fractionibus ostendimus, evidentissimè ita debere contingere demonstratur; idemque similiter de spatiis aliis infinitè longis,

gis,

gis, de quibus passim Geometræ, & nos infra nonnulla dicturi sumus, absque scrupulo pronunciandum, quòd scilicet determinatæ magnitudini æqualia sint, dummodò tota prorsus accipi intelligantur, nulla ipsorum portione relicta; quod quia conceptu difficillimum est, quum infiniti natura respuat, nedum ut totum integrè designari queat, sed etiam ut imaginatione comprehendi valeat, itaut, post quamlibet partem, non aliam, & aliam ejus extensionem cogitemus, quippe cujus ultimum limitem non concipimus; ideò prudens Auctor cautè addidit: Spatia illa, non tam absolutè infinita, quàm juxta illam dimensionem interminata, ad datam cum spatio finito proportionem tam propè accedere, ut distare possint defectu minori quolibet dato, quàmdiu scilicet illud spatium indeterminatè sumitur, ut longiùs, ac longiùs protensum, nec totum semel integrè accipi intelligitur, aut saltem accipi fingitur.

10 Mirum autem nemini videatur, quòd idem spatium Logisticæ infinitè longum in spatia cujuslibet progressionis, nempe terminorum in ratione dupla, tripla, quadrupla, sesquialtera &c. decrescentium in infinitum distribui possit, pro varia portionum axis altitudine, quum tamen progressiones diversarum rationum non ejusdem sint valoris, sed progressio dupla æqualis unitati, tripla semissi unitatis, quadrupla trienti, &c. non enim eadem est quantitas, quæ locum unitatis obtinet diviso Logisticæ spatio in terminos rationis duplæ, ac quæ eamdem unitatem repræsentat, cùm dividitur in terminos rationis triplæ, aut quadruplæ; siquidem in primo casu unitas est duplum primi spatii, in secundo triplum spatii primi, in tertio quadruplum, &c. quæ sunt quantitates longè diversissimæ; interea hinc habetur, eamdem magnitudinem esse duplam spatii, cujus ordinatæ sint in ratione dupla, dimidiam tripli, hoc est sesquialteram, spatii, cujus ordinatæ sint in ratione tripla, trientem quadrupli, hoc est sesquitertiam spatii, cujus ordinatæ sint in ratione quadrupla, atque ita deinceps, eadem existente omnium horum spatiorum majori ordinata, singulis pro communi rationis antecedente inserviente; adeòque si totum Logisticæ infinitum spatium ponatur esse partium 12. spatium primũ, cujus ordinatæ sint in ratione dupla, erit partium 6, & cujus or-

ordinatæ in ratione tripla, partium 8, & cujus in ratione quadrupla, partium 9, ac ſimiliter de aliarum rationum ſpatiis ratiocinari licebit; id quod tamen ex primo etiam Auctoris Theoremate facilè deduci poteſt.

11 Neſcio autem, an obiter, dum ferrum candet, exponere generalem regulam juvet, qua dignoſci poſsit, quando ſpatia infinitè longa, vel termini multitudine infiniti, etiam cùm decreſcunt, quantitatem abſolutè infinitam adæquent, & quãdo prorſus finitam, ac terminatam. Eam certè ante plures annos, quum Theologicis ſtudiis adoleſcentes noſtros imbuerẽ, in quadã Appendice ad Tractatum de Viſione Dei, talem proferebam. Quoniam, ut innui in notatione Præfationis Vivianeorum Problematum *pag.27*. duarum quantitatum ratio componitur ex rationibus ſingularum dimenſionum illis quantitatibus competentium, & invicem comparatarum, expendendum eſt, num ratio ex his compoſita ſit ratio finita, nec ne. Jam, aggregatum plurium terminorum, quatenus quædam diſcreta quantitas eſt, unam tamen continuam magnitudinem, & quantitatem integrans, duas habet dimenſiones, quippe ex duplici capite quantitas ex hiſce terminis aggregata creſcere, & major fieri poteſt, nimirum ex terminorum *multitudine*, & ex propria ſingulorum *quantitate*; quò plures enim termini adunantur, eò major, cæteris paribus, quantitas conſurgit, putà quò plures fractiones in unam ſummam colliguntur, eò major ſumma conficitur; & ſtante aliàs pari terminorum multitudine, quò *majores* in ſe ipſis ſinguli fuerint, eò pariter major magnitudo colligitur; ſic tres fractiones decimales majorem ſummam conficiunt, quàm tres milleſimæ, aut centeſimæ; ut ergo videamus, num propoſitis quibuslibet infinitis terminis, ij quantitatem infinitam aggregent, an tantùm finitam, obſervandum eſt, an creſcente arithmeticè in infinitum ipſorũ multitudine, decreſcat pari ratione, aut majori, vel minori ipſorum quantitas; ſi in eadem ratione decreſcat, ut in 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, &c. ubi ſecundus terminus eſt ſemiſſis primi, tertius triens ejuſdem, quartus ejus quadrans, &c. prout multitudo duorum eſt dupla unius, triũ eſt tripla, quatuor quadrupla, &c.

pro-

procul dubio quantitas omnium ſimul infinita erit, quia cùm terminorum multitudo ſic æquipolleat ipſorum abbreviationi, ſeu parvitati, ratio quantitatis talium terminorum ad aliã aſſignabilem quantitatem, putà ad unitatem, utpotè compoſita ex ratione multitudinis, & parvitatis eorumdem terminorũ reſpectu dictæ unitatis (altera ratione alteram elidente) erit ratio infinita, & ipſorum terminorum quantitas æquipollebit quantitati infinitorum terminorum invicem æqualium, quæ certiſſimè infinita eſt. At ſi in majori ratione termini decreſcant, ut accidit in ſeriebus numero 8 adductis, quæ geometricè decreſcunt, creſcente terminorum multitudine arithmeticè (atque in aliis benè multis, quæ etſi non geometricè, omnibus tamen compenſatis in majori ratione decreſcunt, quàm creſcat ipſarum multitudo) tunc præpollente parvitate ſingulorum terminorum eorumdem multitudinis incremento, prodibit ex utriuſque compoſitione finita ratio, & aggregabitur quantitas prorſus finita; quando autem in minori ratione decreſcant termini, quàm illorum pluralitas augeatur, ratio pluſquàm infinita exinde conſurget, ſeu à fortiori, quàm in primo caſu, dicendum erit, omnium aggregatum quantitatis eſſe ſimpliciter, ut ajunt, infinitæ, præpollente multitudinis incremento ipſorum abbreviationi terminorum.

12 Idem applica ſuperficiebus, aut ſolidis, quorum una, aut altera dimenſio infinita ſit, altera tamen, aut reliquis continuè diminutis; prout enim in majori, aut eadem, minorive ratione minuetur altera dimenſio, quàm creſcat ea, quæ in infinitum extenditur, judicandum erit ſpatium illud præcisè finitum eſſe, aut infinitum, vel pluſquàm (ſi dicere liceat) infinitum Hinc Cl. VVallisius in Arithmetica Infinitorũ optimè obſervat, ſpatium hyperbolæ, & aſymptoto interjectum, cujus latitudo in eadem ratione minuitur, in qua longitudo aſymptoti creſcit (propter latera parallelogrammorum æqualium ejuſmodi ſpatio inſcriptorum neceſſariò reciproca) eſſe idcircò infinitæ prorsùs magnitudinis, in hyperbolis autem aliorũ graduum, ex una quidem parte finitum eſſe, ubi in majori ratione decreſcunt lineæ ad aſymptoton ordinatæ, atque adeò

la-

latitudo ejusdem spatii, ex altera autem parte, idest ad aliam asymptoton, plusquàm infinitum existimandum, eò quòd in minori ratione ordinatæ decrescant; id quod in aliis etiam spatiis, tum solidis, tum superficialibus observari potest.



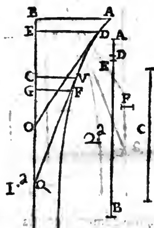
# CAPUT V.

*Quartum Hugenii Theorema, pridem demonstratum, nova demonstratione per diversam methodum stabilitur; Tractoriæ proprietas hinc deducta, quòd ordinatæ ad æquales curvæ partes sint invicem proportionales. Cuilibet curvæ tangentem ducere. Velocitates in diversis curvæ punctis sunt, ut facta ex ordinatis in subtangentes alternè sumptas. In Hyperbola sunt, ut quadrata temporum contrariè sumptorum. Determinatio tangentium ad infinitas parabolas. Eadē expeditior. In aliis curvis quomodò tentanda. Variarum ad id constructionum demonstratio. Subtangens curvarum, quæ ad modum Spiralium describuntur. Infinitæ Spiralium species quas subtangentes habeant, & quomodò infinitis parabolis respondeant. Tangens Spiralis Geometricę, & quarumvis figurarum per alteriùs convolutionem genitarum. Tangens Conchoidis Nicomedeę, aliis infinitis Conchoidibus, & Subconchoidibus applicabili methodo ostensa. Eadem geometrica demonstratione confirmata. Tertia demonstratio quarti Theorematis Hugeniani. Curva parabolica Logisticæ semper perpendicularis.*

ɪ Quar-

1 QUartum Auctoris Theorema; *Quod subtangens, ut BO in eadem figura, ejusdem semper est longitudinis, ad quodvis Logisticæ punctum tangens pertineat*, alia demonstratione non indiget, quum probatum fuerit *cap.* 4. *num.* 3. subtangentem æqualem semper esse Parametro hujus curvæ, quæ linea quædam constans, & definita est; verùm ad pleniorem sciẽtiam id aliter, atque aliter demonstrabimus, diversa methodo, eaque ad alias longè veritates applicabili.

2 Secunda igitur hujus Theorematis demõstratio sic institui poterit. Sint *fig.* 1. hujus diagrammatis quælibet ad axem Logisticæ ordinatæ AB, VC, tangentes ad eadem puncta AO,




VQ. Dico interceptas ordinatis, & tangentibus BO, CQ (quæ subtangentes appellantur) æquales esse. Sumatur quantumvis parva BE, illique æqualis CG, ut ordinatis ED, GF portio tangentis AD ferè cum curva AD, & portio tangentis VF ferè cum curva VF coincidere censeri possit, ob infinitè parvum intervallum utrivis ordinatarum pari interjectũ: erit igitur ex natura curvæ, in qua sunt puncta D, F, ipsa AB ad ED, ut CV ad GF, juxta primariam Logisticæ affectionem; rursus cùm puncta D, F supponantur & in tangentibus esse,

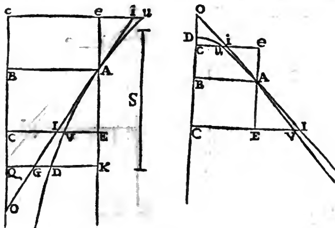
eſſe, erit AB quidem ad ED, ut BO ad OE; CV verò ad GF, ut CQ ad QG; ergo eadem erit ratio BO ad OE, que CQ ad QG, & per converſionem rationis eadem ratio BO ad BE, quæ QC ad CG; ſuntq; conſequentia æqualia; igitur & antecedentia BO, CQ æqualia erunt. Q. e. d.

Poterat rigoroſiùs argui per deductionem ad abſurdum, ſed quorsùm ita? Obſerva potius quid eveniſſet, ſi natura curvæ ea foret, ut ſumptis non in axe, ſed in ipſa curva æqualibus portionibus AD, VF, eædē ordinatæ proportionales eſſent;

An non enim eodem argumento conſtaret, OA ad AD eſſe, ut QV ad VF: unde conſequentibus æqualibus exiſtentibus, etiam antecedentia, ſcilicet, tangentes ipſas AO, VQ ubilibet æquales futuras, adeòque ejuſmodi curvam illam ipſam fore, quam *Tractoriam* vocant? eam ſcilicet, quam deſcriberet grave A funi AO alligatum, dum funis extremum O per rectam OQ trahitur in eodem horizontali plano; pondus ſiquidem perfectè ſequetur ejuſdem funis directionem, adeòque ejus viæ tangens erit perpetuò eadem funis longitudo: quamquàm hoc generale eſt, ut cùm relatio ordinatarum ad axem mutatur in relationem ordinatarum ad curvam, eadem ex-

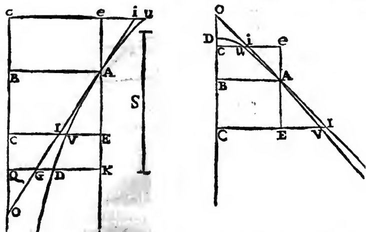
expreſſio ſubtangentis tranſeat ad ipſam tangentem, ut pluribus exemplis confirmare in promptu eſſet.

3 Utilius erit Tertiæ demonſtrationi ejuſdem Theorematis viam ſternere generali quodam lemmate circa tangentium inventionem præmiſſo, quod ex Torricellii doctrina obiter indicata in l. 1. de mot. gr. prop. 18. ejuſque Scholio, in hunc modum deduxi; ſicque univerſaliter proponere ſtatui. Ad datum cujuslibet curvæ punctum tangentem ducere. Datum




ſit punctum A curvæ cujuslibet D A V, cujus axis B C, ordinata ex dato puncto A B: concipiatur hæc curva deſcripta motu ordinatæ B A per axem B C æquabiliter fluentis, ſibique æquidiſtanter delatæ, & ex motu puncti A versùs B accedentis, vel ab eodem in ipſa linea recedentis, non jam æquabiliter (ſic enim recta linea, non curva deſcriberetur) ſed velocitate accelerata, aut retardata, prout opus ad eam curvam generandam. (quælibet certè curva hoc modo genita intelligi poteſt) Fiat igitur, ut velocitas, quam punctum fluens habet in ſitu A ad velocitatem ordinatæ æquabiliter delatæ, ita ipſa ordinata A B ad portionem axis B O, acceptam versùs eas partes, ad quas motus acceleratur, ſi curvæ cavitas axem reſpiciat, ad

quas verò retardatur si curva axi convexitatem obvertat. Dico junctam O A esse tangentem. Sumatur enim in ipsa O A, ad partes accelerationis punctum i, ad partes verò retardationis punctum V, ordineturque c u i, C V I occurrens axi in c, C, curvæ in u, I, axi parallelæ A E per A ductæ in e, E. Quoniam velocitas puncti A per A B fluentis ad velocitatem lineæ A B per axem delatæ est, ut A B ad B O, seu I E ad E A, aut i e ad e A, manifestum est, quòd si motus puncti A non

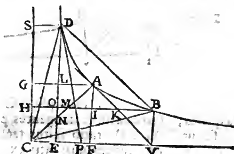



acceleraretur, aut retardaretur, fieret per ipsam A I, seu A i, ita ut quo tempore ordinata descenderet, aut ascenderet per B C, seu A E, aut B c, seu A e, punctum A percurreret partem E I, seu e i, repereriturque in I, vel i. Verùm quoniam motus puncti A curvam describentis intereà acceleratur versùs u, & versùs contrariam partem V retardatur, ita ut velocitas ipsius A in A major sit, quàm in V, quia versùs eas partes remittitur, minor autem, quàm in u, quum versùs eas partes invalescat; ideò quo tempore ordinata venerit in C E, punctum A curvam generans minorem ordinatæ portionem E V confecerit, quàm confecisset si pristinam velocitatem retinuisset; minor est igitur E V, quàm E I; cùm verò ordi-

nata

nata venerit in c e, punctum A curvam generans majorem ejusdem ordinatæ tractum e u pertransierit, quàm si pristinæ velocitati nullos accelerationis gradus addidisset; major est igitur e u, quàm e i; & ideò puncta I, i sunt utrobique ultra, & extra curvam, quare ipsa O A tangit. Quod erat demonstrandum.

Observare hinc juvat, velocitates puncti non æquabiliter fluentis, veluti in figura D A B ad axem C V comparata, in




punctis D, A, esse ad invicem, ut facta ex ordinatis in subtangentes alternatim sumptas, putà, existentibus tangentibus D P, A V, ordinatisque D E, A F, ut factum ex D E in F V ad factum ex A F in E P; nam velocitas puncti fluentis in D ad similem velocitatem in A rationem compositam habet ex velocitate talis puncti in D ad æquabilem velocitatem lineæ descendentis, & ex hac ipsa velocitate ad velocitatem puncti ejusdem in A; sed prima ratio, ex hoc Theoremate, eadem est, quæ D E ad E P, secunda verò eadem, quæ V F ad F A; igitur ratio velocitatis puncti fluentis in D ad velocitatem ejusdem in A componitur ex D E ad E P, & ex V F ad F A, idest eadem est, quæ facti ex D E in F V ad factum ex A F in E P.

Unde adhuc colligitur, in Hyperbola Apolloniana D A B, cujus asymptoti S C, C V, velocitates puncti fluentis in quibuslibet punctis D, A esse in duplicata ratione temporum

contrariè ſumptorum; ſpatia enim æquabili motu lineæ per axem C V delatæ tranſacta, velut C E, C F ſunt, ut tempora; ſubtangentes autem E P, F V ſunt ipſis E C, F C diſtantiis à centro æquales; ergo eædem ſubtangentes pariter ſunt, ut E C, F C, ſeu ut F A, E D; ratio igitur facti ex D E in F V, & ex A F in E P erit eadem, quæ facti ex D E in F C, & ex A F in E C ideſt compoſita ex D E ad A F, & ex F C ad C E, quæ eadem eſt priori, unde cum illa componit duplicatam rationem F C ad C E, quæ proinde duplicata erit temporum contrariè ſumptorum, ſicut & homologarum ordinatarum D E, A F; & hoc erat demonſtrandum.

4 Hinc tangentes omnium in primis parabolarum determinationem accipiunt; quemadmodum *fig. ſeq.* ſi C a A fuerit parabola quadratica, quæ æquabili motu ipſius C N per C φ ſibi æquidiſtanter delatæ, ac deſcenſu naturaliter accelerato, ideſt ſingulis æqualibus temporibus novum ſibi celeritatis augmentum ſuperaddente, puncti C versùs N per lineam fluentem demiſſo deſcribitur, contingit, ordinata ex foco n ipſa n a, celeritatem puncti deſcendentis in quolibet curvæ puncto A ad æquabilem celeritatem ipſius lineæ delatæ ſemper eſſe, ut ordinata ex dicto puncto A N ad prædictam ordinatam ex foco n a, juxta citatam prop. Torricellii; eò quòd, cùm velocitates deſcenſuum creſcant, ut tempora, atque adeò ut ſpatia motus æquabilis, ideſt ut φ C, f C, ſeu A N, a n, quas linea

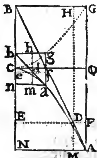
N C

N C æquabiliter transilit, si velocitas descensus in A sit ut A N, velocitas in a erit ut a n; velocitas autem descensus in a est

æqualis velocitati motus æquabilis, quia ordinata ex foco a n dupla est abscissæ c n, eadem verò est celeritas, quæ motu in hac ratione accelerato acquiritur descensu per C n, & qua æquabiliter perseverante conficitur duplum spatium n a, igitur si velocitas in A sit A N, velocitas motus æquabilis erit eadem quæ descensus in a, idest erit, ut n a: quemadmodùm igitur hoc in quadratica obtinet; ita in cubica, ubi celeritates descensuum crescunt in duplicata ratione temporum, ideòque sunt, ut quadrata spatiorum motus æquabilis, scilicet A N, a n, comparando descensum in A ad descensum in a (facta priùs a n tripla abscissæ C n, quia hoc accelerationis genere velocitas per C n descendendo acquisita, triplo spatio a n percurrendo par est, si æquabiliter permanere intelligatur, unde similiter velocitas descensus in a æqualis erit velocitati æquabili lineæ) habebitur, velocitatē descensus in quovis puncto A esse ad æquabilem illam lineæ delatæ velocitatem, ut quadratum A N ad constans quadratum a n; simili ratione in parabola quadrato-quadratica erit velocitas descensus in A ad illam æquabilem velocitatem, ut cubus A N ad a n positam quadruplam ipsius n C abscissæ, atque ita deinceps in aliis gradibus, facta ordinata a n tam multiplici abscissæ C n, quàm multiplex est unitatis exponens ordinatarum.

5 Quam-

5 Quamquàm vix operæ pretium fuerit iis velocitatibus comparandis insistere in parabolarum genere, ubi semel constiterit in quonam puncto velocitas æquabilis motus adæquet celeritatem descensivam, invento scilicet semel puncto a, ubi ordinata a n æqualis est subtangenti n b (quod quidem evenit ubi a n ad n C est, ut exponens gradus parabolæ ad unitatem, scilicet in quadratica, ut 2 ad 1. in cubica, ut 3 ad 1. &c)

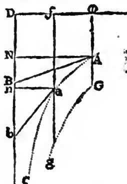



quia enim curvæ parabolicæ simili in singulis suis partibus accelerationis genere describuntur, ita continuè ordinato, ut spatia curvilinea ad circumscriptum parallelogrammum æqualem semper rationem obtineant, etiam in his eadem semper erit ratio subtangentis b n ad abscissam n C, vel spatii C f ad interceptam à tangente f d; unde cùm notum fuerit a n, seu b n ad n C duplam esse in quadratica, triplam in cubica parabola, &c. etiam B N ad N C in eadem semper ratione esse manifestum erit, quare expeditiùs dabitur tangens ad quodlibet punctum A.

Similiter & in Hyperbolis, quarum pariter uniformis est ubique acceleratio, unde & parallelogrammorum quibuslibet spatiis inscriptorum eadem semper est ad infinitè longa spatia iisdem basibus insistentia proportio, subtangentes ad distantias à centro eamdem perpetuò rationem observabunt. Invento itaque *fig. seq.* in Hyperbola A a C ad asymptoton f D, D b puncto a, ubi subtangens æquatur ordinatæ, idest ubi velo-

ci-

citas motus æquabilis descensivam adæquat ( quod quidem evenit, ubi a n ad n D est, ut exponens gradus Hyperbolæ




ad unitatem, scilicet in lineari, seu Apolloniana, ut 1. ad 1. in quadratica ut 2 ad 1. in cubica ut 3 ad 1. &c. prorsus ut in Parabolis contingit, simili enim cum illis motu describuntur, sed dumtaxat reciprocè posito, unde evenit subtangentes cadere ad partes oppositas axis origini, idest sub ipsis ordinatis) cùm constiterit subtangentem inventi puncti a, nempè b n esse æqualẽ in prima, duplam in secunda, triplam in tertia Hyperbola distantiæ à centro n D, notum similiter erit, etiam quamlibet aliam subtangentem B N in eadem esse ratione ad distantiam N D suæ ordinatæ N A ab eodem centro.

6 Difficilior est aliarum figurarum tractatio, in quibus non usque adeò perspecta occurret ad singula puncta velocitatum in curvæ genesim conspirantium proportio; generaliter tantùm dici posset, velocitates descensivas ad singula curvæ puncta esse ad invicem, ut spatia synchronis quibuscumque temporibus peracta, sive ut differentiæ æquè distantium ordinatarum intervallo infinitè parvo dissitarum, seu (*vide fig. pag. anteced.*) si concipiatur ad axem C f Φ curvæ cujuslibet C a A applicata figura Φ G g C, cujus portiones à vertice abscissæ per ordinatas, veluti g C f, G C Φ sint ad invicem, ut ordinatæ ad priorem curvam f a, Φ A, quò fiet lineas ipsas f g, Φ G, utpotè minimas, & infinitè parvas differentias duorum ex talibus

spa-

ſpatiis à vertice abſciſſorum , optimè repræſentare infinitè parvas differentias ordinatarum f a , Φ A , quibus dicta ſpatia proportionantur, adeòque etiam exprimere gradus velocitatum motus deſcenſivi, itaut ſi talis celeritas in a ſit , ut f g, in A futura ſit , ut Φ G ; & ſi reperiatur in curva tale punctum a, cujus ordinata a f ad abſciſſam f C in eadem ſit ratione, in qua ſpatium f g C ad parallelogrammum illi circumſcriptum f g b C, habebitur in a puncto velocitas deſcenſiva æqualis celeritati tranſverſi motus æquabilis, adeòque hæc velocitas æquabilis optimè exprimetur per f g, cæteris deſcenſivi motus celeritatibus per alias parallelas, ut ſupra, determinatis; & ſi fiat, ut parallelogrammum circumſcriptum cuivis ſpatio C C Φ ad ipſummet ſpatium, ita B N ad N C, aut C Φ ad Φ f, juncta A B, ſeu A f erit tangens; ſimiliter ſi fiat ut rectangulum A Φ G ad ſpatium Φ G C, ita A Φ ad Φ f, aut ſi ad rectam Φ G applicetur ſpatium Φ G C, & faciat latitudinem Φ f, juncta A f tanget, quorum unum, vel alterum juxta variam curvæ naturam, ejuſve geneſim, præſertim ſi ab initio figura C G Φ determinata fuerit ( ut ſi quæratur de curva C a A genita ex tranſverſali æquabili motu lineæ C N per datam C Φ , & deſcenſivo puncti C per totam C N, ita accelerato, ut in quovis puncto a gradus ejus celeritatis proportionetur ordinatæ f g dati trilinei, alteriuſve figuræ C G Φ datæ, & ad datam lineam C Φ applicatæ ) aut aliquid cum his connexum facilè innoteſcet, ac tangens expeditè determinabitur.

7 Quorum omnium ratio , quamquàm ſufficienter in demonſtratione *num.* 3. allata contineatur, breviter indicari poterit ſic. Tangens ad aliquod curvæ punctum illa recta eſt, quam deſcripſiſſet, & deſcribere pergeret punctum deſcendens ſi gradum velocitatis, quem in dato curvæ puncto obtinet, æquabiliter retinuiſſet, tranſverſali lineæ motu eodem remanente; ex eo enim, quòd,remota acceleratione, motus puncti A, in *fig. num.* 3. fieret per A I, oſtenſum eſt A I tangentem eſſe; at ſi fiat B N ad N C, ut parallelogrammum B G Φ C ad figuram C G Φ , juncta B A erit via , cui inſiſteret punctum deſcendens, modò gradum celeritatis ſuæ Φ G toto tempore

C Φ

C Φ retinuisset (confecisset enim spatium B N, quod ad N C acceleratè percursum foret, ut planum velocitatis æquabilis Φ G B C ad planum acceleratæ Φ G g C, spatium verò transversali motu emensum esset eadem N A) igitur juncta in tali

constructione A B erit tangens; cùmque & C Φ ad Φ f sit in eadem ratione B A ad A f, seu B N ad N C; necnon A Φ ad Φ f rationem habeat compositam ex A Φ ad Φ C, seu rectanguli A Φ G ad C Φ G, & ex ipsa C Φ ad Φ f, quam vidimus esse, ut rectangulum C Φ G ad spatium G C Φ; itemque cùm C Φ ad Φ f sit, ut rectangulum C Φ G ad f Φ G; igitur si fiat C Φ ad Φ f, ut parallelogrāmum circumscriptum spatio Φ G C ad idem spatium, aut A Φ ad Φ f, ut rectangulum A Φ G ad idem spatium, aut applicetur ipsi Φ G dictum spatium, & faciat latitudinem Φ f, semper juncta A f erit tangens; sed quorsum plura? præcipuæ ex his constructionibus, unde cæteræ pendent, geometricam confirmationem (si abstracta hæc motuum consideratio obscurior, aut minùs tuta videatur) habebis infra, *cap.* 13. *num.* 2.

8 Eadem ferè applicari possunt aliis curvis ex circulari, & progressivo motu descriptis, quemadmodùm infinitæ Spiralium species, Conchoides diversorum generum, Cycloides anomalæ P. Cevæ, & aliæ quamplurimæ [imò quid vetet, ubi commodum acciderit, figuram prorsus omnem ejusmodi motibus compositam concipere, electo intra, aut extra ipsam

quovis puncto, velut circularis motus centro, unde protensi ad curvam rami radiorum elongationem, pro vario progressivi motus puncti per ipsos fluentis incremento, exhibeant?] illud tamen in his observandum, quòd sicuti *cap.* 1. *num.* 12. ad genesim Spiralis Geometricæ per convolutionem Logisticæ, totus ejus axis in punctum contrahebatur, ordinatis ad æquales axis portiones in totidem ramos æqualibus angulis divaricatos abeuntibus, ita ad rem nostram æquabilis motus lineæ per axem delatæ in circularem circa centrum commutandus est, descensus verò puncti, aut progressus per ordinatas, debet in progressum puncti per curvæ ramos, seu radios figuræ converti; atque ut velocitas progressivi motus ad circularem, ita ipse ramus, seu radius spiralis, alteriusve figuræ præfato modo descriptæ, ad portionem lineæ ex centro perpendiculariter ad eumdem radium insistentis, utpotè parallelæ tangenti arcus per circularem motum descripti, in qua est ipsius directio; hoc insuper animadverso, quòd circularis ille motus æquabilis eodem velocitatis gradu minimè pollet in singulis curvæ pun-



ctis, sed pro varia puncti curvæ à centro distantia variatur, ut per se notum est, quippe non in eadem peripheria A L B verbi

bi gratia sumitur circularis motus puncti a spiralis C a A, in qua sumitur circulatio puncti A, ille quippe sumendus in peripheria a I radio C a descripta, quem solum motum participat spiralis in puncto a.

9 Atque inde est, quòd subtangens quidem puncti A in spirali Archimedea post integram revolutionem radii C A æqualis est peripheriæ A L B A eodem radio descriptæ (existente siquidem hic utroque motu æquabili, ipsorum velocitates sunt, ut spatia eodem tempore percursa, ut si velocitas progressivi motus sit C A, velocitas circularis sit ipsa C B subtangens æqualis peripheriæ eodem tempore percursæ) at verò subtangens b c puncti alterius a eadem non erit, ac quæ ad dictam peripheriam sit, ut C a ad C A, ut æquabilitas motus exigeret, sed velocitate progressivi motus expressa per C a, velocitas motus circularis erit tantò adhuc minor, quantò propius centro est punctum a, idest, ut arcus I d a, quem eò usque linea C a illo puncto descripsit, & cui propterea subtangens c b æqualis erit; itaque decrescunt subtangentes in duplicata radiorum ratione, quia semel ob diminutionem radii, & semel adhuc ob pariformem diminutionem circularis velocitatis, atque adeò vertice C descripta parabola A L K, ductisque A K, I L ejus axi parallelis, erunt hæ ad invicem, ut subtangentes radiis helicis C A, & C a (æqualis C I) respondentes; quòd si Spiralis ejus generis fuerit, ut spatia A C, a C motu progressivo percursa sint in subduplicata temporum, aut arcuum circulari motu æqoabiliter percursorum ratione, manifestum est progressivam celeritatem puncti A, vel a subduplam fore ejus, quæ fuerat in prima Spirali, & exponendam per semissem radiorum C A, vel C a, si eadem retineatur linea exponens celeritatem æquabilis circulationis, aut si illa exponenda sit per integras lineas C A, C a, æquabilem celeritatem exponendam fore per priorum subtangentium duplas; erit igitur in hoc casu subtangens C B dupla circumferentiæ A L D A, & subtangens C b dupla arcus a d I, qui ex tribus capitibus minor erit illa circumferentia, nempe in duplicata radiorum ratione, & in earumdem simplici adhuc decremento ob approximationem centri, unde parabola cubica C L K descripta, in

 qua

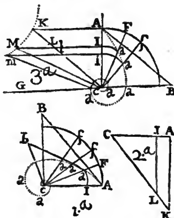
qua axi parallelæ K A, L I ſint in triplicata radiorum A C, C I ratione, ſive ut eorumdem cubi, erunt ipſæ axi parallelæ, ut ſubtangentes ad correlativa curvæ ſpiralis puncta; ſimiliter in aliis Spiralium ſpeciebus, ac parabolis per ordinem correſpōdentibus procedere potes; quod innuiſſe juvabit ad comparandas Spirales curvas cum congruis curvis parabolicis, uti

aliàs facturi ſumus, oſtendendo, quòd ſi A K ſit æqualis $\frac{1}{2}$ circumferentiæ A L D in prima Spirali, aut $\frac{2}{3}$ ejuſdem in ſecunda, aut $\frac{3}{4}$ in tertia, $\frac{4}{5}$ in quarta, &c. prima parabola exiſtente quadratica, ſecunda cubica, tertia quadratoquadratica, &c. Lineæ, ſpiralis, & parabolica æquales erunt; Imò et ſi motus circularis & ipſe æquabilis non fuerit, ſed acceleratus, congruæ parabolæ nihilominus reperientur earumdem nempe poteſtatum in axe, & ordinatis, quot fuerint in reſpondentis Spiralis circumferentia, & radio, ſed ordinatis parabolæ ad tantò plures gradus elevatis, quot fuerint unitates in exponente poteſtatum axis, neque enim difficilior eſt ſubtangentium & ad has Spirales determinatio, faciendo ſemper, ut velocitas

pro-

progressiva ad circularem, ita A C, vel a C ad subtangentem C B, aut C b ex centro perpendiculariter ductam ad suum radium, uti pluribus explicare superfluum est.

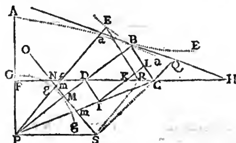
10 In Spirali Geometrica, quoniam ex dictis *cap.* 1. *n.* 12. illa per convolutionem Logisticæ describitur ad maximum radium C A posita C B subtangente æquali subtangenti ejusdem




Logisticæ, quæ convolvitur, aliæ subtangentes C b tantò minores prima C B faciendæ sunt, quantò minor est C a ob rationem in fine *num.* 8. indicatam, quia in ipsa evoluta Logistica subtangens cujusvis ordinatæ semper eadem est, ut supra ostendimus, & mox post illustratam hanc methodum ostensuri sumus; atque inde est, quòd triangula C A B, C a b semper similia sunt, angulique à radiis, & tangentibus æquales, totaq; curva A a C æqualis tangenti A B, & a a C tangenti a b, &c. imò universaliter, si curva quælibet convolvi in Spiralem intelligatur eo modo, quo de Logistica citato loco exposuimus, subtangentes radiorum quorumlibet Spiralis erunt tantò minores, quàm forent subtangentes respondentium æqualium ordinatarum evolutæ, quantò propiora centro sunt puncta extrema dictorum radiorum, quàm punctum extremum maximi radii, quo vides nedum Helicis Archimedeæ, aliarumque di-

diverſorum graduum, per convolutiones, trianguli, parabolæque, quadraticæ, cubicæ, &c. genitarum, tangentes determinari cohærēter ad dicta numero ſuperiori, ſed infinitarum propè aliarum Spiralium, quæ ex quavis figura ſic convoluta oriri poſſunt.

11 Non rarò autem juvabit duorum in eodem radio punctorum motum invicem comparare, quorum alter cognitus ſit, alter certam ad illum proportionem obtineat: exemplo res clarior fiet. Eſto Nicomedea Conchois A a B, polo P, regula F H deſcripta, intervallo A F, cui æqualis ſupponatur




G P radius circuli G g M, & quæratur tangens puncti B; juncto ramo P B ſecante prædictum circulum in M, regulam in D, conſidero curvam A a B genitam ex circulari motu lineæ P A circa P, & ex progreſſivo puncti A per ipſam P A ita aſcendentis, ut non obſtante ejus inclinatione ad regulam F H, ipſum punctum eamdem ſemper à regula diſtantiam obſervet, ſit nempe F A ſemper æqualis D B; progreſſus igitur puncti A venientis in B, nempe exceſſus P B ſupra P A idem erit, ac exceſſus P D ſupra P F; eadem igitur velocitas erit hujus progreſſivi motus, atque illa quam haberet punctum F, ſi in circulatione lineæ P F ita per ipſam aſcenderet, ut ſemper reperiretur in regula F H, eamque re ipſa deſcriberet. Velocitas autem circularis in deſcriptione Conchoidis erit ad punctum B tantò major, quàm circularis velocitas in deſcriptione rectæ F H ad punctum D, quantò major eſt B P, quàm P D. Ducta igitur tangente circuli S M O, atque huic parallelis D I,

B C,

BC, junctaque PIC, ducatur ramo PB parallela IK, occurrens regulæ in K, atq; eidem parallela CQ æqualis ipsi IK. Juncta QB erit tangens quæsita; motus siquidem per DK componitur ex motu per DI parallelam tangenti MS, quæ circularis motus directionem exhibet, & ex motu per IK parallelam PD, in qua est motus progressivus; sed & motus per AaB componitur ex eodem progressivo, qualem exhibet linea CQ æqualis,& parallela ipsi IK,& ex circulari in eadem directione, sed tantò majori,quantò longior est BP,quàm DP, adeòque optimè exprimendum per BC, quæ ad DI in eadem ratione respondet; igitur juncta QB dabit directionem motus ex utroque compositi; idest tangentem ad punctum B. Simili modo etiam Subconchoidis (sic voco curvam, ad quam sunt puncta abscindentia ex ramis PF, PD infra regulam æqualia intervalla) aliarumque specierum in infinitum curvarum Conchilium, & Subconchilium, cùm scilicet abscissa ex ramis, vel supra, vel infra regulam intervalla, non quidem radiis PM quadrantis circularis æqualia sunt, sed subtensis, seu ramis PM, Pg alterius cujuslibet figuræ GMg (quomodo si hæc sit semicirculus circa diammetrum PF, habebitur infra regulam Cissois Dioclea in infinitum continuata, quam proptereà ad genus Subconchilium revoco) tangentes expeditè dabuntur, quas etiam geometricis demonstrationibus cōfirmare, & generali quadam constructione exprimere in promptu esset, nisi verendum foret, ne longiùs ab instituto digrederer; itaque solam primariæ Conchoidis geometricam demonstrationem, ex qua Lector, si acuto pollet ingenio,facilè sibi cæteras cōparabit,in medium afferam,quæ quidē est hujusmodi.

12 Supponatur BC concurrere cum regula in C (potest enim tum BC, tum DI cujuslibet longitudinis esse, dummodò intra ramum PB, & junctam PC contineantur) ducto autem quovis alio ramo Pa, fecante regulam in f, ponatur fE æqualis,non quidem radio Pg, sed Pm secanti anguli MPg, & sic ubique fiat, ut habeatur curva EBE, quam manifestum est tangere Conchoidem in B, quia, cùm Pm semper major sit radio Pg, etiam fE major erit intervallo Conchoidis fa,

pun-

puncta igitur E semper sunt supra puncta a Conchoidis; ut igitur observat verus Geometra in Recreatione Geometrica, quæ linea recta tanget curvam E B E, eadem tanget Conchoidem a B a, propter angulum contingentiæ semper indivisibilem, minoremque [ut dici solet] quovis angulo rectilineo;

jam verò ostendemus curvam E B E esse hyperbolam intra asymptotos H N O, ejusque tangentem esse ipsam B Q convenientem cum regula in H; quia ducta P S regulæ parallela, occurrente tangenti M S in S, ob triangula similia D B C, P M S, quorum latera B D, P M sunt æqualia, æquales etiam erunt bases D C, P S, unde juncta S C æquidistabit ipsi D M; quare C N ad N S erit, ut D N ad N M, seu ut P S ad S M, vel C B, adeòque rectangulum N C B æquale erit ipsi N S P; eodem modo ducta E R ipsi B C parallela ostendetur junctâ S R æquidistare ipsi m f, adeòque N R E æquale esse eidem N S P; æqualia igitur cùm sint rectangula N C B, N R E curva E B E erit hyperbola intra angulum H N O; cùmque sit N C ad C D, ut M B, seu P D illi æqualis ad B D, idest (extensa I K ad B C in L) ut B L ad L C, seu I K ad K L, nempe C Q [æqualis ex constructione ipsi I K] ad excessum D B supra C Q, aut denique ut C H ad eamdem C D, erit N C ipsi C H æqualis; ergo H Q B hyperbolam in B tangit, & consequenter Conchoidem: quod nobis propositum erat demonstrare.

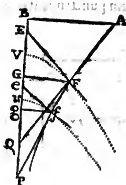
13 Jam tandem, ut promissam Theorematis IV. Hugeniani demonstrationem ex ea, quam proposuimus, methodo ab-

abſolvamus; ſi in Logiſtica fiat, ut velocitas puncti A illam deſcribentis, juxta geneſim *cap.* 1. *num.* 5. indicatam, ad æquabilem velocitatem lineæ A B per axem delatæ, ita A B ad B O, conſtat ex dictis *num.* 3. atque hactenus abundè illuſtratis, junctam A O eſſe tangentem; ſimiliter ſi fiat, ut eadem æquabilis velocitas ad velocitatem puncti fluentis in V, ita Q C ad C V,

junctа V Q tanget; habebit igitur velocitas in A ad velocitatem in V rationem compoſitam ex A B ad B O, & ex C Q ad C V, ſive erit, ut A B in C Q ad B O in C V; ſed eædem velocitates ex dictis tum *cap.* 1. *num.* 3. tum indicatis hìc *n.* 6. ſunt etiam ut B A ad C V, omnes quippe ordinatarum æquo intervallo diſtantium differentiæ ſunt ipſis totis ordinatis proportionales, igitur A B in C Q ad B O in C V eſt ut A B ad C V, quare ſubtangentes B O, C Q ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.

14 Hinc obiter colligere poſſumus, quòd ſi parabola, cujus parameter dupla fuerit parametri Logiſticæ, circa eumdem axem conſtituta fuerit, aut juxta ipſum axem flue-

re concipiatur, in quovis situ alteram altera ad rectos angulos secabit, putà parabola V F, cujus parameter dupla sit subtangentis Logisticæ G Q, & ad communem cum ipsa axem constituta, aut juxta ipsum fluens, utraque se intersecante in




puncto F, aut f, angulus curvarum V F A, aut u f A semper erit rectus; Cùm enim intercepta G Q inter ordinatam, & Q F perpendicularem parabolæ, sit dimidia suæ parametri, demõstrante id Vero Geometra in Clariss. de Max.& Min. Op. erit in hoc casu æqualis subtangenti Logisticæ; ergo Q F tangens Logisticæ, idest ipsamet curva A F erit perpendicularis parabolæ V F, & è contra tangens E F parabolæ, seu ipsa curva parabolica V F erit perpendicularis tangenti Logisticæ Q F, seu curvæ A F in puncto quovis sibi occurrant.



CA-

# CAPUT VI.

*Quintum Theorema proponitur, quod ut demonstretur, ostenditur, hyperbolica spatia parallelis asymptoto proportionalibus definita æqualia esse; spatia quælibet eam inter se rationem habere, quam extremarum ordinatarum rationes. Axi Logisticæ parallelæ inter se sunt, ut Hyperbolica spatia iis respondentia. In Geometrica Spirali, arcus, & sectores circulares ejus ramis interjecti, proportionantur spatiis, & sectoribus hyperbolicis respondentibus. Subtangens Logisticæ ad quamvis axi parallelam est, ut parallelogrammum hyperbolæ inscriptum ad spatium hyperbolicum. Demonstrandi modus à scrupulis vindicatur. Propositio universalior redditur. Quid sit facere Universale Prima Geometricæ Spiralis subtangens est ad arcus circulares, ut hyperbolæ parallelogrammum ad hyperbolica spatia. Spatia hyperbolica, aut sectores hyperbolici in ea sunt ratione ad circulares sectores correspondentes, in qua minima ordinatarum hyperbolę ad semissem subtangentis Logisticæ. Parallelogrammum hyperbolæ inscriptum ad spatium ordinatis duplæ proportionis interjectum est proximè, ut 10. ad 7. Quinti Theorematis Hugenii demonstratio.*

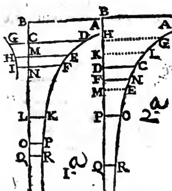
1 LOngiùs in præcedenti capite progressi fuimus, quàm ab initio sperabamus: habenæ ideò contrahendæ in præsenti, in quo Quintum Hugenii Theorema nobis demonstrandum proponimus. *Hæc longitudo*, inquit de subtangente, *per*

***approximationem reperitur, estque ad partem asymptoti interje-ctam ordinatis proportionis duplæ, ut*** 434294481903251804 ***ad*** 301029995663981195, ***seu proximè, ut*** 13 ***ad*** 9. Quia tamen infiniti penè laboris, ac tedii esset longissimos hos Hugenii numeros persequi, neque ad manum Tabulæ Logarithmicæ ad tam multiplices notas extensæ occurrunt, quibus verisimile est usum Hugenium ad ejusmodi calculum expediendum, ideò eundem lapidem alia methodo movere aggrediar, majorique tum compendio, tum emolumento, vel ad hanc ipsam, vel ad aliam huic propinquam dictarum linearum proportionem intelligendam Lectorum mentes disponam.

2 Præmittendum igitur, quòd Hyperbolæ, & Asymptoto interjecta spatia, alteri asymptoto parallelis proportionalibus terminata, invicem æqualia sunt; id quidem Gregorius à S. Vincentio Magnus superioris sæculi Geometra, suæque Societatis Lumen Amplissimum, primus, quòd sciam, ostendit, quia tamen nec mihi, nec plerisque fortasse Lectorum meorum, ejus Codex ad manus est, placet demonstrationem hanc cõcinnare. Esto, ***fig.*** 1. ***seq. Schem.*** asymptotis A B Q interjecta hyperbola D E R, assignenturq; spatia D C N F, K L Q R definita extremis lineis D C, F N, & K L, Q R alteri asymptoto parallelis, invicem verò proportionalibus. Dico ejusmodi spatia invicem æqualia esse; ex natura siquidem hyperbolæ erunt etiam B C, B N, B L, B Q proportionales, utpotè iisdem parallelis reciprocè respondentes; earumque differentiæ C N, L Q homologis terminis B C, B L, aut L K, C D itidem proportionales. Ordinetur ergo ad C N ipsa C G æqualis L K, & ipsa N I æqualis Q R, atque inter duas C B, B N, sumpta media proportionali B M, ordinetur M E; similiter inter duas B L, B Q sumpta media B O, ordinetur O P, cui æqualis ponatur M H; atque ita porrò sumptis aliis intermediis inter B C, B M, ac B L, B O; inter B M, B N, ac inter B O, B Q ordinatæ ad extrema talium mediarum in spatio K L Q R trãsferantur, & applicentur extremis dictarum mediarum in linea C N existentium, quoadusque fiat spatium C G H I N, cujus ordinatæ sunt æquales ordinatis spatii K L Q R, sed applicatæ ad partes altitudinis C N proportionales partibus al-

ti-

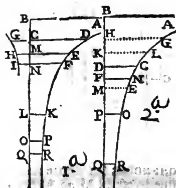
titudinis L Q; nec enim dubium, quin N M ad M C sit, ut Q O ad O L, utpotè differentiæ trium continuè proportiona-




lium ejusdẽ utrobiq; rationis; (existente scilicet N B ad B M, ut B M ad B C, dividendo est N M ad M B, ut M C ad C B, & alternando N M ad M C, ut M B ad C B, aut O B ad L B, idest, eadem ratione, ut Q O ad O L) idemq; de aliis intermediis dicendum. Jam sic: spatium D C N F ad K L Q R rationem habet compositã ex D C N F ad C G I N, & ex C G I N ad K L Q R. Sed prima ratio eadem est, quæ D C ad C G, vel K L (cæteræ enim ordinatæ E M, & M H, seu P O; F N, & N I, seu Q R, aliæque intermediæ eamdem perpetuò rationẽ observant) secunda autem ratio eadẽ est, quæ altitudinis C N ad L Q (per demonstrata prop. 1. append. nostræ Probl. Vivian.) hoc est, ex supra dictis, eadẽ, quæ ejusdem L K ad C D; igitur ratio spatii D C N F ad K L Q R componitur ex D C ad L K, & L K ad ipsam D C, scilicet est ratio æqualitatis. Quod erat demonstrandum.

3 Hinc facillimè deducitur, spatia quævis hyperbolæ, & asymptoto interjecta, lineisque alteri asymptoto parallelis conclusa esse ad invicem, ut sunt rationes extremarum ordinatarum, quibus concluduntur; spatia nimirum C D F N,

OPQR, *fig.* 2. ita comparata sint, ut ratio CD ad NF æqualis non sit rationi OP ad QR, sed in alia quavis proportione, putà altera alterius triplicata, aut duplicata, vel sesquialterata, &c. erit pariter alterum spatium alterius triplum, duplum, aut sesquialterum; sumpto enim rationis CD ad FN

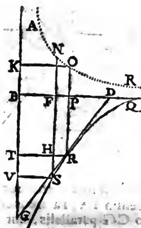



quovis multiplici, putà ratione GH ad NF triplicata ipsius CD ad NF (idest ipsis FB, DB, sumptis aliis duabus continuè proportionalibus KB, HB, erectisque ordinatis KL, HG) constat spatium GNFH æquè multiplex fore spatii CDFN (ob singula spatia GK, LD ipsi CF æqualia ex *num. præced.* quippe lineis proportionalibus terminata.) Similiter rationis OP ad QR sumpta quavis multiplici, putà duplicata, EM ad QR (idest ipsis QB, PB sumpta tertia proportionali BM, atq; erecta ME) patet spatium ERQM æquè multiplex, scilicet duplum fore spatii OPQR, quandoquidem EP æquabitur ex *num. præced.* ipsi OQ. Quod si ratio GH ad NF æqualis foret rationi EM ad QR, spatium quoque GHFN æquaretur spatio EMQR, si illa major, & hoc majus, si ratio minor, & spatium minus (ut patet, aut apertè deducitur ex *præcedenti*) itaque, ex nota pro-

por-

portionalium definitione Euclidea, erit ratio linearum C D, & N F ad rationem linearum O P, & Q R, ut spatium prioribus cōclusum C D N F ad spatiū posterioribus interjectū O P Q R. Quod erat demonstrandum.

4 Unde apertè colligitur, quòd, si ordinatæ Logisticæ adhæreat præmissa figura hyperbolica linea N O R, atque asymptotis B Q, B A interjecta, quarum illa ordinata, hæc axis

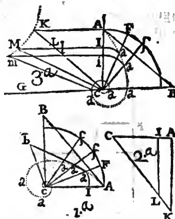



Logisticæ fuerit, producanturque ipsæ N F, O P ad Logisticam in S, R, erit spatium hyperbolicum N R Q F ad spatiū O R Q P, ut axi Logisticæ parallelæ, F S, & P R; cùm enim dicta spatia sint ad invicem, ut rationes inter F N, Q R, & inter O P, Q R intercedentes, ut *num. praced.* ostensum est, sive ut rationes inter Q B & BF, vel V S, & inter Q B, ac B P, seu T R intercedentes, quæ quidem rationes ex dictis *cap. 1. num.* 3. sunt, ut portiones axis iisdem ordinatis interceptæ, V B, T B, seu S F, R P, etiam dicta spatia Hyperbolica N F Q R, O P Q R erunt, ut lineæ S F, P R. Quod erat demonstrandum.

*Supple in Diagrammate lineam Q R ipsi NF parallelam, claudentem spatium hyperbolicum.*

5 Si-

5 Simile quidpiam accidit Spirali geometricæ A a a, in qua arcus, aut ſectores per radios ſpiralis abſciſſi, veluti A F, A f, aut A C F, A C f ſunt, *fig.* 3. *b. Schem.* ut hyperbolica ſpatia A I M K, A i m K comprehenſa portionibus A I, & A i aſym-




ptoti A C, quibus differentiæ extremorum ramorum a F, a f ſint æquales [ſunt enim I A, i a arcus concentrici ipſi A F f] & alteri aſymptoto C G parallelis, curvaque hyperbolica iis intercepta; etenim arcus illi A F, A f, & conſequenter & ſectores A C F, A C f ils reſpondentes, ex dictis *cap.* 1. *nu.* 10. ſunt, ut rationes radiorum Spiralis A C, a C, ſeu A C, & C I, A C, & C i, in qua pariter ſunt dicta ſpatia hyperbolica; cùmque ductis ex centro C rectis C K, C M, C m (debent enim hæ lineæ in centrum convergere, utut in Schemate, vitio Sculptoris, exorbitent) ſector M C K ipſi ſpatio K A I M, & ſector m C K ſpatio m i A K ſit æqualis (ab æqualibus quippe triangulis K C A, M C I ablato communi C L I, additoque utrique reſiduo M L K res eſt perſpicua) habebimus ſectores hyperbolicos in eadem ratione ſectoribus circuli ordinatim reſpondentes; erit enim M C K ad m C K, vel ad m C M, ut A C F, ad A C f, vel F C f.

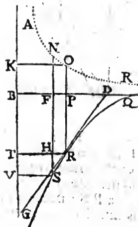
6 Col-

6 Colligi intereà ex ſupra dictis poteſt, quòd ſubtangens, ſeu parameter Logiſticæ eſt ad quamvis axi parallelam, ut parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum ad congruum ſpatium hyperbolicum, ſcilicet ad punctum R Logiſticæ ducta tangente R G, erit G T ad R P, ut parallelogrammum K O P B ad ſpatium O P Q R; ſumatur enim tangentis portio R S infinitè parva, ita ut ducta parallela ordinatæ S V, parallela axi S H N occurrente hyperbolæ in N, tum ipſa tangens R S ferè coincidat cum curva R S; necnon H S, ut terminata ad curvam ferè æqualis ſit eidem, ut terminatæ ad tangentem; ideſt habeat ad ipſam rationem propiorem æqualitati, quàm quælibet data majoris inæqualitatis ratio quantumlibet parva, tum etiam hyperbolicum ſpatium N F P O ferè cum rectangulo O P F coincidat, ſeu illud excedat minori exceſſu quolibet dato: conſtat ex *nu*.4. & dividendo, fore ſpatium N F P O ad O P Q R, ut H S ad P R, & ſumptis antecedentium æquè proportionalibus, parallelogrammo K P, & linea T G (eſt enim K P ad O P F ferè cum ſpatio P N coincidens, ut B P ad P F, ſeu T R ad R H, vel T G ad H S, prout termina-

 tam

tam ad tangentem, quæ ferè coincidit cum terminata ad curvam in S) erit parallelogrammum KP ad spatium OPQR, ut TG ad PR. Quod erat demonstrandum.

7 Si cui videatur audacior præcedentis demonstrationis processus, simulque infirmior, quàm ut assensum extorqueat, is demonstratione apagogica utatur, per me licet, imò ut huic & similibus applicare discat, specimen hìc dabo. Fingat sibi quis minorem esse, si fieri possit, alterutram dictarum rationum, verbi gratia ratio GT ad PR minor esto ratione KP ad spatium OPQR, itaut illi adjicienda foret ratio alia majoris inæqualitatis, quæ sit inter *c*, & *d*, ad hoc ut huic alteri rationi æqualis evadat. Cùm itaque ratio PR ad HS (ut




terminatam ad curvam) sit postea eadem, quæ OPQR ad spatium NP, erit rursus ratio TG ad eamdem HS minor quàm ratio KP ad spatium NP, eodē defectu rationis *c* ad *d*; potest autem HS terminata ad curvam esse ad HS, ut terminatam ad tangentem in ratione minori, quàm quælibet data ratio *c* ad *d*; si igitur rationi TG ad HS priorem addatur ratio HS prioris ad HS posteriorem, fiet ratio TG ad HS po-

posteriorem, hoc est T R ad R H, vel K P ad rectangulum O P F, adhuc minor, quàm sit ratio ejusdem K P ad spatium N P; quod est impossibile, foret enim rectangulum O P F majus spatio N F P O, cui inscribitur. Si verò dicatur è contra ratio K P ad spatium O Q minor altera ratione T G ad P R, fiet eadem demonstratio, incipiendo ex parte spatiorum, unde concluderetur, quòd H S terminata ad tangentem major foret, quàm H S terminata ad curvam, seu quòd tangens curvã secaret. Nullus igitur esse potest in ratiocinio nostro scrupulus, nec de fallacia insimulari debet, sed de compendio laudari.

8 Intereà notandum velim, præmissam demonstrationem nō pendere ab ulla sive Hyperbolæ, sive Logisticæ proprietate, sed hinc dumtaxat, quòd spatia hyperbolica proportionalia sint parallelis axi Logisticæ; quæ affectio infinitis curvis invicem comparatis communis esse potest; ut si F Q N sit triangulum apicem habens in Q, & F Q S trilineum parabolicum; utique axi parallelæ erunt, ut interceptarum F Q, P Q quadrata, sive ut similia spatia triangularia his insistentia; si superior figura sit trilineum parabolicum quadraticũ, inferior erit parabolicum cubicum, & sic de aliis, tum parabolarum speciebus, tum curvarum generibus; quocirca eamdem demonstrationem iis applicare potes, aut universaliùs ipsum Lemma concipere sic. In qualibet curva Q R S, cujus ordinatæ P R, F S (sumpto F Q pro axe) sint in eadem ratione cum spatiis P O R Q, F N R Q per easdem ordinatas abscissis ex figura N R Q F eidem axi applicata, erit subtangens G T ad P R, ut rectangulum, seu parallelogrammum O P B ad spatium O P Q R; & conversim, si ut illud parallelogrammum ad hoc spatium, ita fuerit P R, seu B T ad T G, juncta G R erit tangens; nec refert cava ne, an convexa sint spatia, quæ comparanda sunt, eadem quippe ratio semper militat, aut parùm certè immutata. Hinc aliam habes tangentium ducendi methodum, aliasque, & alias veritates per te prudens Lector extundere poteris, sed (quod majori in pretio habendum est) hinc disces Veterum, & Recentiorum Geometrarum propositiones Universaliores reddere, attendendo, num proprieta-

tes, quas ſpecialiter de quadam figura demonſtrant ex peculiari ejus affectione pendeant, an verò ex communi pluribus Symptomate deriventur. Atque id revera eſt facere Univerſale, quod adeò deprædicant Metaphiſici, & an per intellectum, an verò, ut barbarè loqui ſolent, etiam à parte rei dari poſſit, exquirunt. Quod quidem ipſis integrè decidendum relinque mi Lector, atque ab ea ſollicitudine bonas horas aliis utilioribus ſtudiis debitas redimere ſatage, ſpondeo enim, aliquot ſæculorum myriadibus antequàm illi conveniant, & quod tot tricarum apparatu expiſcari contendunt in aperto ponant (uti hactenus certè incaſſum laboraſſe video, nec à tot ſæculis, vel latum unguem profeciſſe, aut aliquam ſaltem inde utilitatem in Philoſophicis, aut Theologicis rebus inde ſibi, aliiſve exculpſiſſe, plus nimiò expertus agnovi) Te innumerabiles, atque utilliſimas veritates geometricas invēturum per illud, quod ſuperiùs deſcripſi, Geometricum Univerſale, ejuſdemq; applicationem ad multiplices figurarum ſpecies, quas aut Geometria miniſtrat, aut ſibi facilè unuſquiſque fingere poterit.

9 Nec intereà omittendum, quòd Spirali Geometricæ rurſus quid ſimile contingit, quod ipſi Logiſticæ, ſubtangens enim

CB prioris radii AC eſt ad quemvis arcum AF, aut Af, ut

ut parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum K A C ad ſpatiũ correſpondens M I A K, aut m i A K, quod, tum eadem methodo probari poteſt, tum & de ſe patet, quum ex dictis *cap. præced. num.* 10. prima ſubtangens C B ſit eadem, quæ erat ſubtangens Logiſticæ, ex cujus convolutione, juxta dicta *cap.* 1. *num.* 12. Geometrica Spiralis gignitur, ordinatis in radios commeantibus, & axis portionibus, ejuſve parallelis in arcus curvatis, ac propterea eadem erit ipſius C B ad arcum A F ratio, quæ priùs erat ſubtangentis ad parem axis portionem, ejuſve parallelam, adeòque eadem, quæ parallelogrammi prædicti ad aſſignatum hyperbolicum ſpatium.

10 Exinde autem habetur, quòd ſpatia illa hyperbolica, aut ſectores iis æquales, de quibus *num.* 5. in ea ſemper ratione erunt ad correſpondentes circulares ſectores, in qua minima ordinatarum ſpatii hyperbolici A K ad ſemiſſem ſubtangentis C B; etenim ſi A K ſupponatur æqualis dictæ ſubtangenti C B, erit ut rectangulum K A C ad ſpatium hyperbolicum K A I M [ quod ſumi poterit latitudinis A I infinitè parvæ, ut ferè coincidat cum inſcripto rectangulo K A I ] ideſt ut C A ad A I, ita ipſa K A, vel ipſa C B ad arcum A F, ex numero ſuperiori; rectangulum igitur K A I, ſeu ſpatium ipſum hyperbolicum M I A K erit æquale rectangulo radii C A in arcum A F, hoc eſt duplum ſectoris A C F; cùmque ex dictis *num.* 5. & alii ſectores aliis ſpatiis in eadem ſint ratione, ſingula ſpatia K A I M, K A i m, aut hyperbolici ſectores K C M, K C m, dupli erunt reſpondentium ſectorum circularium A C F, A C f; & ſi A K æqualis fuerit ſemiſſi C B, erunt dicta ſpatia, & ſectores hyperbolici ad circulares ſectores in ratione æqualitatis; ſi quis autem obrepſerit ſcrupulus circa hanc demonſtrationem, remedio numeri ſeptimi ritè applicato amoliendus erit.

* *Nota, demonſtrationem horum numerorum* 9. *&* 10. *appellare figuram* 3. *Diagrammatis appoſiti proximo num.* 9. *in adverſa pagina.*

11 Jam oſtendendum eſt, quòd parallelogrammum Aſymptotis, & Hyperbolæ inſcriptum eſt ad ſpatium hyperbolicum, cujus extremæ ordinatæ duplam proportionem ſervent, proximè ut 10 ad 7. Eſto ALBE quadratum hyperbolico ſpatio, quod hyperbola AG, aſymptotis LBF continetur, inſcriptum; & ſumpta FE æquali ipſi EB, ordinetur FG: erunt ordinatæ AE, FG in ratione dupla. Dico quadratum EL ad ſpatium AHGFE (adeòque & quodvis parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum ad ſpatium ordinatis rationis duplæ interjectum) eſſe proximè, ut 10 ad 7. ducta enim diametro BA, & juncta AF (quæ tangens erit, quoniam extenſa ad alteram aſymptoton bifariam ſecaretur in A, prout BF bifariam ſecaretur in E) ductaque GD, & HICNK aſymptoto BF parallelis; quoniam rectangula ALB, HKB æqualia ſunt, & communi ablato BEC æqualia remanent ECH, KCA, erit HC ad CA, vel CI (ob angulum EAF ſemirectum) ut KC, ſeu EA ad EC, & dividendo, HI ad CI, vel CA, ut CA ad CE; cùm igitur ſint EC, CA, IH continuè proportionales, erit tertia IH æqualis quadrato ſecundæ CA diviſo per primam CE; itaque ſi EA dicatur æqualis $a$, & quælibet portio AC dicatur $c$, erit HI æqualis $\frac{cc}{a-c}$; intelligatur ergo AE in 100. æquales particulas di-

vi-

*Supple in Diagrammate lineam FG ipſi AE parallelam, claudentem ſpatium hyperbolicum.*

vidi, quarum A D erit 50, & si ab A sumantur per ordinem 1, 2, 3, &c. ejusmodi particularum, & calculo exprimantur lineæ in trilineo A M G respondentes, prout H I correspondet ipsi A C, invenietur hæc series $\frac{1 \times 1}{100-1}$, $\frac{2 \times 2}{100-2}$, $\frac{3 \times 3}{100-3}$, &c. usque ad $\frac{50 \times 50}{100-50}$; hæc enim est expositio universalis expressionis suprapositæ $\frac{cc}{a-c}$ pro diverso valore ipsius $c$; idest rectæ illæ, velut I H, in trilineo A M G parallelæ, & ad centesimas quaslibet ipsius A E partes applicatæ, erunt per ordinem $\frac{1}{99}$, $\frac{4}{98}$, $\frac{9}{97}$, &c. usque ad $\frac{2500}{50}$, quod æquatur ipsi M G 50 ejusmodi particularum. Summa igitur harum omnium fractionum designabit proximum valorem, seu quantitatem trilinei A M G, respectu quadrati A E B, quod est in hac suppositione 10000; porrò illæ fractiones ad minimos terminos redactæ, & simul additæ dant circiter 700 (ut experiri unusquisque poterit, si satis otii, & patientiæ habuerit ad calculi laborem ferendum) triangulum verò A D M æquatur dimidio quadrati A D, scilicet 50 ducto in 25, quod est 1250 & parallelogrammum G D E F, quadrati A E subduplum, est 5000, igitur summa ex trilineo, triangulo, & parallelogrammo, nempe spatium hyperbolicum A G F E est 6950, ut ex hac formula patet.

| | |
|---|---|
| Trilineum A M G | 700 |
| Triangulum A D M | 1250 |
| Parallelogrammum G D E F | 5000 |
| Summa, spatium G A E F | 6950 |

Proportio itaque spatii A G F E ad quadratum A E B L est eadem, quæ 6950 ad 1000, seu, dividendo utrobique per 50, ut 139 ad 200, quæ est circiter 140 ad 200, aut subdividendo per 20, ut 7 ad 10: & hoc fuerat demonstrandum.

12 Jam V. Theorem. Hugenii demonstrationē sic expedio. Sit A D dupla D K, seu F B ordinatæ ad Logisticā A B h; erit F D intercepta axis inter ordinatas duplæ proportionis; ostēdendum est F O subtangentem, seu parametrum Logisticæ esse ad F D, vel B K proximè, ut 13 ad 9. Jam ex dictis *num. 6.* est F O ad B K, vel D F, ut parallelogrammum inscriptum hyperbolæ ad congruum spatium hyperbolicum, quod in hoc casu (si intelligatur super A D descriptum, & ordinatis ex A, & K definitum) terminabitur ordinatis duplæ proportionis, propter A D duplam D K; sed illud parallelogrammum ad tale spatium hyperbolicum ex *præcedenti numero* est pròximè, ut 10 ad 7, ergo & O F ad D F, vel B K erit proximè in eadem ratione 10 ad 7, aut utrobique per 13 multiplicando, ut 130 ad 91, quod proximum est rationi 130 ad 90, hoc est 13 ad 9. Ratio igitur subtangentis ad axis portionem interceptam ordinatis duplæ rationis proximè est, ut 13 ad 9, uti Hugenius in hoc Theoremate proposuerat.

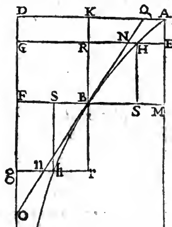
CA-

# CAPUT VII.

*Sextum Theorema proponitur, & universaliùs demonstratur. Spatia Logistica in data ratione dividere; Cavum trilineum convexo æquale; rectangula spatiis Logisticis æqualia. Item spatiis hyperbolicis. Ordinatæ in trilineo Logisticæ, axi parallelæ, convexis, & cavis hyperbolæ segmentis proportionales. Eadem aliis figuris applicare. Hyperbolam ducere, quæ datam Logisticam, vel in dato puncto contingat. Maximum parallelogrammum Logisticæ inscribere, & duo utrinque æqualia determinare. Data cujusvis figuræ tangente maximum illi parallelogrammum inscribere, & contra. Idem circa alia maxima præstare per alias hyperbolas. Infinitarum hyperbolarum tangentes. Spiralis geometricæ spatia inter se, & cum suis partibus comparantur. Cujusvis convolutæ figuræ, ejusve partium ad circumscriptum sectorem, & ejus zonas proportio eadem, quæ Conoidis ab evoluta figura, ejusve partium ad circumscriptum cylindrum, & tubos cylindricos. Evolutæ ad convolutam ratio, quibus composita. Exempla in Spiralibus. Geometricæ Spirali doctrina applicatur.*

1 PRoposuit in Sexto Theoremate Hugenius, quòd, *si fuerint tres ordinatæ, velut in hac figura sunt AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam pertinente ducatur asymptoto parallela secans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ easdem secans in N, & Q; spatia trilinearia ABK,* K *HBR*

*HBR sunt inter se, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, idest, ut AQ, HN.* Quod quidem ferè cum secundo Theoremate conincidit, poteltque ex *cap.* 4. *num.* 4. dictis demonstrari, ut patebit, applicando demonstrationem




lineæ g h minusculis litteris expressæ, secanti tangentem in n, axi parallelam per B ductam in r; patebit enim interceptas tangenti, & Logisticæ curvæ, ordinatis parallelas, sive infra, sive supra punctum contactus esse, ut spatia comprehensa iisdem ordinatis, Logisticæ curva, & axi parallela per contactum ducta, adeòque secundum, & sextum Theorema in unum convenire.

3 Sic igitur argui poterit. Cùm sit O F ad F B, ut B K ad K Q, erit O F in K Q æquale F B K rectangulo; sed F O in B M, seu in totam K A æquatur toti spatio D A B F per *cap.* 4. *num.* 3. igitur F O in residuam Q A æquatur residuo spatio K A B: eodem modo ostendetur O F in R N, seu r n æquale rectangulo F B R, F B r; adeòque cùm sit H G F B, h g F B, æquale F O in B S, seu H R, vel h r, erit spatium R B H, r B h, æquale F O in N H, n h; adeòque trilineum A K B ad H R B, seu h r B, erit, ut A Q ad N H, seu n h, quæ sunt bases rectangulorum sub communi altitudine subtan-

tangentis FO illis ſpatiis æqualium. Et hoc fuerat demonſtrandum.

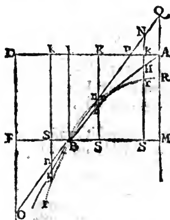
3 Hinc facile erit quævis Logiſticæ ſpatia, ſive concava, ſive convexa per ordinatas in data ratione dividere; ſpecialiter autem hinc inferre juvat, quòd ſi ex quovis puncto H Logiſticæ ducatur tangenti O N parallela occurrens curvæ ultra cōtactum in h (finge ductam, licet in Schemate deficiat) erit portio Logiſticæ concava H R B æqualis convexæ h r B, propter æquales H N, h n, iis parallelis interceptas; imò addito utrinque ſpatio B H S, cum rectangulo S B r, inferes rectangulum H R r æquale eſſe ſpatio Logiſticæ, curva H h, ipſaque H S ad h r extenſa, intercepto; indeque rectangulum G R r æquale reſiduo ſpatio G H B h g, æquale proinde & rectangulo ex O F ſubtangente in R H cum r h, ſeu in s S, adeòq; O F ad G g ſe habere, ut G R, ſeu B F ad s S; ſed nimiùm minutis detineor.

4 Expendere potius juvabit, quibus ſpatiis proportionales ſint lineæ in trilineo N B H, aut n B h, parallelæ, non quidem



ordinatis, ſed ipſimet axi. Inter aſymptotos A D, D F ducatur per ipſum punctum B Logiſticæ hyperbola r B r r R; ante omnia oſtendendum eſt, tangente Logiſticæ O B occurrente

ſupremæ ordinatarum, ſeu aſymptoto hyperbolæ in P, rectangulum B k P æquari ſpatio hyperbolico k B r R A; eſt enim rectangulum B k P ad k B F rectangulum hyperbolæ inſcriptum, ut illius baſis P k ad baſim hujus k D, ſeu B F, hoc eſt, ob ſimilitudinem triangulorum, ut k B ad ſubtangentem Logiſticæ F O, indeque ex *cap. præced. num. 6.* ut hyperbolicum ſpatium A R r B k ad idem parallelogrammum F B k;



æqualia igitur ſunt rectangulum B k P, & ſpatium hyperbolicum A R r B k: quod fuerat demonſtrandum; ſed & alibi generaliùs idem oſtendemus, ſcilicet *cap. 13. nu. 2.*

5 Cùm verò ex *cap. præced. num.* 4. ſpatium hyperbolicum k B R A ad quodvis aliud axi Logiſticæ parallelis reſectum k r R A ſit, ut k B ad k h, & dividendo ſpatium hyperbolicum k B r k ad r R A k, ut s h ad h k; manifeſtum eſt, ſumpta communi altitudine k P dictarum linearum in k P ductarum rectangula proportionari ſpatiis hyperbolicis correſpondentibus, adeòque rectangulum P k in k h æquari ſpatio k r R A, & rectangulum ejuſdem P k in s h æquari ſpatio k B r k; &c.

6 Parallelæ igitur axi Logiſticæ, trilineis N B H, n B h concluſæ, proportionales erunt reſpectivis trilineis hyperbolicis

r B s,

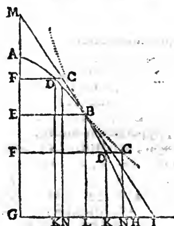
r B s, r B s convexis, aut concavis, prout citra, vel ultra B parallelæ ducuntur; etenim demonstratione *num.* 3. iterum applicata; cùm sit k P ad B k, ut B M ad M Q, vel B S ad S N, & B s ad s n. Erit rectangulum k B M, vel k B S, aut k B s æquale rectangulo ex P k in M Q, S N, vel s n; sed etiam spatium B k A R, aut B k k r æquatur ex *num. præced.* rectangulo ejusdem P k in M A, aut S H, vel s h; igitur rectangulum ex P k in residuam A Q, vel H N, aut h n æquale erit trilineo hyperbolico R B M, aut r B S, &c. & ideò lineæ A Q, N H, n h axi Logisticæ parallelæ, ejusque curva, & tangente conclusæ, erunt ut respectiva hyperbolica spatia supra definita. Quod erat demonstrandum.

7 Aliis figuris similem comparationem suscipientibus, ut ordinatæ unius proportionales sint spatiis abscissis alterius, applicari res eadem potest, quemadmodùm, tum hìc, tum alibi locum habere possunt observationes, & corollaria similia his, quæ *num.* 3. indicavimus; specialia verò problemata duo ex sola figuræ præmissæ inspectione facillimè solves. Alterum: Inter asymptotos F D, D A, quarum illa sit axis, hæc ordinata Logisticæ A B h, hyperbolam ducere, quæ Logisticam in aliquo puncto B tangat; vel dato in Logistica puncto B, hyperbolam nihilominus reperire, quæ idem præstet: ponatur D F æqualis subtangenti F O: ordinata F B, & D A, fiat per B hyperbola inter asymptotos F D A; hæc proculdubio Logisticam tanget; siquidem eadem O B, tum Logisticæ, tum Hyperbolæ tangens communis erit; unde consequitur, quòd, si fingatur per aliud punctum B ducta hyperbola, occurret in alio puncto eidem Logisticæ, supra B quidem, si F D major fuerit subtangente, infra verò si minor. Alterum est. Logisticæ maximum parallelogrammum inscribere: ponatur D F subtangenti æqualis, & ordinetur F B: patet D F B maximum fore omnium, quæ dato Logisticæ spatio inscribi possint, parallelogrammorum; alia siquidem parallelogramma eidem Logisticæ spatio inscripta minora erunt, eò quod, ut illud primum adæquent, extendenda sint usque ad perimetrum hyperbolæ per B descriptæ, quæ tota ultra Logisticam cadit, utpotè ipsam tangens ex nuper dictis: unde patet, cuivis alteri

pa-

parallelogrammo aliud æquale eidem Logisticæ inscriptum exhiberi posse, ducta scilicet per punctum, ubi Logisticæ occurrit, Hyperbola, quæ in alio puncto Logisticam secans dabit punctum, ad quod inscribatur parallelogrammum æquale priori, eo quòd utraque spatio asymptotis, & hyperbolæ interjecto inscribantur.

8 Leviuscula quidem hæc, si per sese considerentur, at ratione methodi, quam generalem esse Lectorum sollertia percipiet, suo pretio non fraudabuntur: hinc enim habebimus, data ratione, quam habere debet subtangens ME figuræ



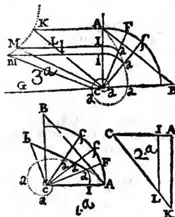

ABHG ad abscissam AE, dari & maximum parallelogrammum EBL ipsi inscriptibile, si nimirum in eadem data ratione fiat GE ad EA, ut GE, EM sint æqualia, tangens quippe MBI erit & tangens hyperbolæ CBC per B inter asymptotos AG, GH ductæ, atque adeò quodvis aliud parallelogrammum GFDK datæ figuræ inscriptum minus erit parallelogrammo GFC, atque adeò minus GEB, quod proinde maximum esse convincetur; & è contra dato maximo parallelogrammo GEBL figuræ ABHG inscripto, dabitur ejus tangens, posita EG æquali EM, quia quodvis aliud paral-

rallelogrammum GFD cùm sit minus ipso GEB, erit & minus GFC (ducta per B inter easdem asymptotos hyperbola CBC) & ideò FD minor erit, quàm FC, & hyperbola CBC curvam DBD tanget; sed hyperbolam tangit recta MB, ergo & curvam DBD propositam. Et quod de parallelogrammis maximis dictum est, assumpta hyperbola lineari, potest ad maximos cylindros, aliave maxima facta ex gradibus coordinatarum EB, BL transferri, usurpatis alterius generis hyperbolis, quadratica, cubica, &c. in quibus facta ex homonymis coordinatarum gradibus sunt æqualia, eò quòd quadrata, aut cubi ordinatarum reciprocentur distantiis à centro, seu angulo asymptotali.

9 Quod si earumdem infinitarum hyperbolarum, in quibus videlicet non simplices lineæ BL, CN, sed ipsarum quadrata, aut cubi, aliique majores gradus sint in reciproca ratione distantiarum GN, GL, earumve, graduum quorumcumque, tangentes ignorare te dicas: ne desponde animo, paucis, adverte, docebo, & quidem ex hac ipsa, quam præ manibus habemus, methodo demonstrationem eruendo: exponens graduum, quos consideramus in ordinatis BL, CN esto $x$, graduum verò, qui considerantur in distantiis NG, GK esto $y$; ducta ex quolibet hyperbolæ puncto BE asymptoto parallela, fiat GE ad EM, ut $x$ ad $y$, juncta MB tanget; quia enim ut $x$ ad $y$, ita GE ad EM, factum ex gradu GE, cujus exponens $x$, in gradum EM, cujus exponens $y$, maximum erit omnium similium factorum ex partibus lineæ GM utcumq; divisæ, uti ex maximorum, minimorumque methodo facilè constat; quare & factum ex similibus gradibus GEB maximum erit omnium similium factorum ex lateribus parallelogrammi triangulo MIG ad aliud, quàm B punctum inscripti; quæ igitur linea tangit figuram triangularem MIG in B (ipsum nempe latus MI) tanget in eodem puncto hyperbolam CBC ex iisdem gradibus coordinatarum constitutam.

10 Jam ad institutum nostrum, unde paululum divertimus, propiùs accedentes, quemadmodum in Logistica Hugenius propos. 1. 2. & hac, quam præ manibus habemus, sexta, varia ejus segmenta invicem comparavit; ita, ut in Logistica convo-

voluta, nempe Spirali Geometrica, idem nos præstemus, argumenti similitudo suadet. Primùm igitur, sicut Logisticæ spatia post quamlibet ordinatam in infinitum protensa sunt, ut ipsæ ordinatæ ex dictis *cap.* 3. *num.* 7. ita Spiralis geometricæ spatia post quemlibet ejus radium in infinitum circa centrum per innumeras, sibique superimpositas circulationes continuata sunt inter se, ut quadrata eorumdem radiorum; intellecto enim spatio Spiralis A a a C in triangula innumera, ut *cap.* 1. *num.* 11. factum est, distributo, quæ ex ibi dictis similia erunt, A C a, a C a, &c. erunt singula inter se, ut homologorū



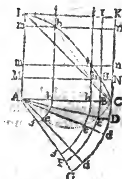
radiorum quadrata, quæ continuè proportionalia sunt, juxta curvæ hujus naturam; itaque ut unum A C a ad unum a C a, ita omnia spatio A a C inclusa ad omnia inclusa spatio a a C (sunt quippe totidem hìc, atq; ibi, utpotè multitudinis utrobique infinitæ) nempe, ut quadratum A C ad quadratum a C, ita spatium, quod post A C intra dictam Spiralem convolvitur, ad spatium, quod post a C eadem Spirali concluditur.

11 Hinc dividendo habetur, spatium A C a esse ad infinitè contortum post minorem radium C a, ut differentia quadratorum A C, a C, seu C I ad minoris a C, vel C I quadratum, hoc est, ducto arcu a I, ut armillæ portio F A I a ad sectorem

I a C,

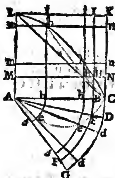
I a C, ficuti *cap.* 3. *num.* 8. & in Tertio Theoremate Hugenii demonftrando *cap.* 4. *num.* 5. oftendimus, in Logiftica fpatium duabus ordinatis interjectum effe ad infinitè longum poft minorem ipfarum protenfum, utì eft differentia ipfarum ordinatarum ad minorem ex ipfis; & veluti in primo Hugenii Theoremate *cap.* 3. demonftrato, fpatia Logifticæ ordinatis conclufa erant, ut extremarum ordinatarum differentiæ, ita in Spirali geometrica fpatia quælibet A c a, a c a erunt inter fe, ut differentiæ quadratorum ab extremis radiis dicta fpatia comprehendentibus, five ut circulares armillæ F A I, f a i illis adfcriptæ.

12 Trilineis verò a I A, five ad invicem, five cum refiduis a A F, aut cum zonis F A I a comparandis inferviet generale hoc Theorema. Si quævis figura L H C, axe A L in punctum



A contracto, illique parallela K C in arcum C G æquabiliter curvata, tranfeat in Spiralem C E A, ordinatis H M, h m in totidem ejus ramos, feu radios A E, A e abeuntibus, & per angulum E A e divaricatis, cujus menfura fit arcus D d æqualis intervallo ordinatarum, nempe ipfi M m, vel N n. Dico Spirale fpatium C E A fore ad circumfcriptum fectorē C G A, utì eft conoides ex figura L H C circa axem L A ad circumfcriptum cylindrum ex parallelogrāmo A K circa eumdem axem revoluto. Ducto pariter quovis arcu E B, aliifque lineis coordinatis, ut in figura, trilineum B C E fore ad cir-

cumſcriptam zonam B C D E, uti eſt annulus ex H C B circa axem revoluto ad tubum cylindricum ex circumſcripto parallelogrammo H N C B circa eumdem axem, ac dividendo, trilineum B E C ad C E D eſſe, ut ſunt annuli ex ipſis H B C, H C N circa axem revolutis; quodlibet etiam trilineū B E C ad aliud b e C, aut C E D ad aliud C e d eſſe, ut ſunt annuli ex ipſis B H C, b h C, aut ex H C N, h C n circa ipſum axem;




portiones quoque B E e b, ſive ad aliam b e e b, ſive ad trilineum quodvis B C E eſſe, ut reſpectivè inter ſe ſunt annuli ex H B b h, h b b h, aut H B C circa ipſummet axem L A. Longior eſt propoſitio, quàm demonſtratio. Arcus enim B E ad B F eſt, ut C D ad C G, ſcilicet ex conſtructione, ut C N ad C K, vel B H ad B I, nempe ut cylindrica ſuperficies, quæ in conoide ex linea B H, ad cylindricam ſuperficiem, quæ in cylindro per lineam B I circa axem revoluta producitur; & hoc ſemper, ſive lineas majuſculis litteris, ſive minuſculis notatas inter ſe compares; ſunt autem tum arcus B F, in ſectore concentrici, tum cylindricæ omnes ſuperficies ex B I, concentricæ in cylindro, proportionales, quippe in eadem ratione diſtantiarum a centro A, vel axe A L; ergo ex Lemmate 29. Torricellii de dimenſione parabolæ, omnes arcus concentrici in ſectore ad omnes concentricos in ſpatio Spirali erunt, ut ſunt omnes ſuperficies cylindricæ in cylindro ad omnes cylindricas ſuperficies in conoide; unde & dividendo, &

pro-

proportionales partes comparando, habebitur veritas Theorematis propositi.

13 Quandoquidem ob æqualitatem arcus CG cum axe figuræ LA, ducta subtensa LC, erit triangulum LAC æquale sectori CGA, atque adeò erit ad Spirale spatium in eadem ratione, in qua cylindrus conoidi circumscriptus ad ipsam conoidem, hinc figura quælibet evoluta ad convolutam rationem habebit compositam ex ratione sui ad triãgulum æquè altum in eadem basi, & ex ratione circumscripti cylindri ad conoidem ex ejus revolutione circa axem genitam. Cùm Spiralis Archimedea, ob æquabilitatem motuum, quibus componitur, habeat radios proportionales ordinatis in triangulo basi parallelis, indeque fiat convolutione trianguli axem habentis parem arcui sectoris circumscripti, fit inde, spatium spirale trientem esse circumscripti sectoris, quemadmodum conus ex triangulo triens est circumscripti cylindri; & cùm secunda Spiralis quadratica fiat convolutione parabolæ, cujus ad inscriptum triangulum ratio est sesquitertia, cylindri verò circumscribentis conoidem ab ipsa genitam ratio est dupla, ideò spirale spatium quadraticum erit semissis circumscripti sectoris, habebit verò parabola, ex qua gignitur, ad se ipsam in tale spatium convolutam, rationem compositam ex sesquitertia, & dupla, idest quam 8 ad 3. & sic deinceps applicationem prosequere mi Lector.

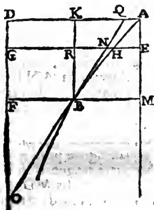
14 Ego ad Spiralem Geometricam revertor, in qua, utpote ex convolutione Logisticæ genita, jam scies Trilinea, initio *num.* 12. recensita, eam inter se rationem habitura, quam annuli ex correspondentibus Logisticæ portionibus trilinearibus circa axem revolutis, sive inter se, sive cum tubis cylindricis illos circumscribentibus comparatis, ubi geometricæ Spiralis trilinea cum zonis circularibus illa includentibus conferantur; quomodo autem illi annuli ex Logisticæ portionibus geniti notam habent quantitatem, nonnisi perspecta solidorum, quæ ex Logistica circa axem revoluta producuntur, mensura, ostendi potest; de qua re in nono Theoremate cum Hugenio, agendum erit, ideòque ex dicendis *cap.* 9. *num.* 10. defectus supplendus est.

# CAPUT VIII.

*Septimum Theorema pridem ostensum, ut nova demonstratione fulciatur, ostenditur, spatio à qualibet curva contento quò ad totum, & quò ad partes æquale spatium ex subtangentibus ad curvæ puncta applicatis, vel ad respectiva puncta basis: item ducta per quodvis punctum tangentibus parallela, occurrente ordinatis, puncta intersectionum esse in curva, quæ cum priori comprehendet spatium primæ figuræ duplum, adeòque cum ejus basi [ nisi hanc nova curva secet, ac congruo loco punctum acceptum sit ] spatium primo æquale. Eadem opera duæ ejusmodi curvæ describuntur. Eadem doctrina conversim accepta inventioni tangentium deservire poterit. Dimentio figuræ per normam, & perpendiculum descriptæ; Spatii Cycloidis, obiter ejus tangente determinata, dimensio, variorumque segmentorum proportio. Segmenta ejusdem quadrabilia. Cissoidalis spatii, ejusque segmentorum mensura. Spatium à Tractoria, & ejus axe interceptum æquale quadranti radio suæ tangentis descripto. Infinitarum parabòlarum, hyperbolarum quoque infinitarum specierum, spiralium item cujusvis generis, etiam Geometricæ dimensio expeditur. Septimi Theorematis Hugeniani demonstratio ex hac doctrina eruitur. Octavum quoque Theorema pridem ostensum hinc novam demonstrationem assumit.*

1 Ad

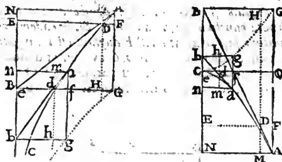
1 AD ſeptimum Theorema gradum facimus. Illud Hugenius his verbis proponit: *Spatium infinitum inter ordinatam, Logiſticam, & aſymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum eſt trianguli comprehenſi ordinata, tangente ad idem ordinatæ punctum, & ſubtangente. Sic in eadem figura ſpatium infinitum poſt ordinatam BF duplum eſt trianguli BFO.* Quod quidem ex dictis *cap.* 4. *num.* 6. evidenter deducitur, rectangulum enim ſubtangentis, ſeu parametri FO in ordinatam BF, quod loco citato oſtenſum eſt ſpatio infinito poſt




BF exporrecto æquale, utique duplum eſt trianguli BFO ejuſdem baſis, & altitudinis; ſed aliam nihilominus demonſtrationem adjiciemus ad pleniorem ſcientiam, & methodi varietatem, aliis detegendis veritatibus inſervientem, uti ex his, quæ ſpeciminum loco ſubjungemus, prudens Lector agnoſcet; Vix certè figura ulla notæ hactenus deſcriptionis eſt, cujus dimenſio ex fonte jam aperiendo non elegantiſſimè promanet: imò & infinitorum ſolidorum menſura hinc elici poteſt, ut patebit *capite ſequenti nu.* 7. & diſtantia centri gravitatis variarum figurarum, ut *cap.* 11. *nu.* 6. conſtabit.

2 Sit

2 Sit curva quævis A D C circa axem B N, & ex quibusvis curvæ punctis A, a ductis tangentibus A B, a b, quæ cum

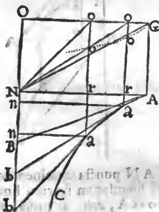


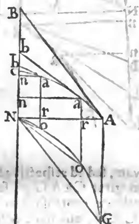

axe conveniant in punctis B, b, necnon ordinatis A N, a n, compleantur parallelogramma A N B G, a n b g circa ipsas tangentes, velut diametros consistentia; sicque semper fiat, ut per omnium parallelogrammorum angulos exteriores, idest per puncta G, g, transeat curva G g: comprehendet hæc cum priori curva A a C, & latere extimi parallelogrammi A G, spatium C a A G g æquale figuræ prius positæ C a A N; sumpta enim quantùmlibet parva tangentis particula A D, a d, ac per D, d ductis axi, & basi parallelis M D H, E D F, m d h, e d f erunt rectangula G D, D N, g d, d n, utpotè complementa parallelogrammorum circa diametrum, invicem æqualia (potes & utrinque addere A D, a d, ut compares æqualia parallelogramma A H, N F, aut a h, n f; potes insuper directum parallelogrammum A H, a h in dextera figura commutare in obliquum intra easdem parallelas eidemque nihilominus tangenti impositum, spatio autem C A G g melius adjacens ad evidentiorem circumscriptionem) & hoc semper in quolibet puncto eveniet, ergo cùm in utroque spatio hæc indefinitè parvæ latitudinis parallelogramma possint ab iis deficere, si inscripta sumantur, aut eadem spatia excedere, si circumscripta comparentur, minori defectu, aut excessu quolibet dato; constat ipsamet spatia C a A G g, C a A N integrè, & particularium,

idest,

ideſt tum tota, tum eorum correſpondentes partes invicem cõparando, prorſus æqualia eſſe. Imò inde inferre potes, quòd, cùm totum parallelogrammum N G trianguli N B A ſit duplum, & complexum ex utraque figura g G A a C, & C a A N duplum ſolius C a A N, reliqua figura B G g C dupla erit trilinei C A B, curva C A, tangente A B, & axis portione, quam tangens intercipit, comprehenſi; id quod expeditæ multarum figurarum dimenſioni conducere poteſt.

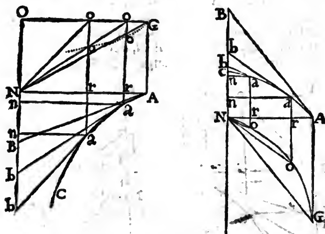
3 Hinc ſi in qualibet figura C A N, ductis ubilibet axi parallelis, primùm A G æquali ſubtangenti N B extimi puncti A,




tùm a r o, a r o, reſectis ultra ordinatam A N ipſis r o, r o reſpectivè æquantibus longitudinem ſubtangentis n b, n b ad ſuum punctum a pertinentibus, quouſque compleatur figura o o G A N; vel etiam (quod in idem recidit) ſi per N punctum regula quædam N G converti concipiatur, ſecans axi figuræ parallelas a r, a r productas in punctis o o, itaut eadẽ regula N G, ſive N o ſemper parallela exiſtat tangenti A B, aut a b, ſintque B A G N, b a o N parallelogramma (quomodo rurſus r o æqualis erit reſpectivæ n b, auferendo ſcilicet ex æqualibus a o, b N, æquales a r, n N) Ex utraque in-

inquam hac deſcriptione colligitur, figuram o o G A N æqualem fore priùs datæ figuræ C A N, quemadmodum & partes correſpondentes r A G o, n a A N ſemper æquales eſſe; quid enim hoc aliud eſt, quàm ipſas lineas A G, a g, *num. præced.* conſideratas, directè deprimere in A G, r o, ut jam non ad

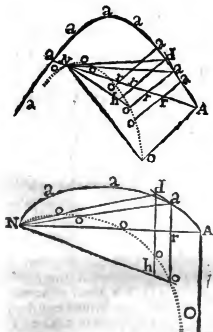



curvam, ſed ad reſpectiva baſis A N puncta terminentur? Spatium igitur C a A G g, ſervata ſingularum ſuarum linearum æqualitate, protruſum in N o o G A, erit, ut priùs, æquale ipſi C A N, niſi malis & hìc ſumere infinitè parvam tangentis portionem, ferè cum curva A a coincidentem, & ex proportionalitate B N, ſeu G A ad r a, cum N A ad A r, inferre æqualitatem rectangulorum G A r, & A N n, ac ſimiliter in reliquis, ut ſupra.

4 Vel etiam ſumpta infinitè parva tangentis, aut curvæ portione A a, junctiſque ad N radiis A N, a N, a N, oſtendetur ſemper parallelogrammū G A a duplum trianguli N A a, utpotè eidem baſi A a, inter eaſdem parallelas A a, N G (aut a a, N o) inſiſtentis, quare tota figura C a A G o o N totius C A N dupla erit, & dividendo ſpatium o o G A N ipſi C A N æquale erit; eo modo quo & in his bilineis curva,

& re-

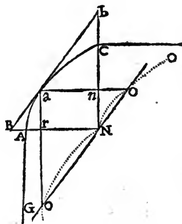
& recta comprehensis, velut a a A, aut N a A, accepto puncto N, sive in extremo basis, sive alibi, aut etiam intra figuram, & per N transeunte recta N o, quæ tangentibus a d

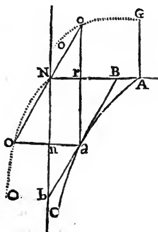


perpetuò parallela existens, secet ipsas a r, ad basim N A ordinatas, in punctis o, erit N o o A a N dupla trilinei, seu bilinei (prout integra sumitur, aut ejus pars ramis N a intercepta) N a A, propter parallelogrammum d a o h ubique duplum trianguli d a N; unde mirùm quot figuræ dimensionem accipiant.

5 Imò eadem opera possent duæ figuræ eidem datæ æquales constitui, si nempe regula mobilis per punctum N utrinque extendatur, ut occurrat ambis coordinatis ex eodem puncto,

scilicet non tantùm ipsi a r axi parallelæ, sed & a n parallelæ basi in punctis o o; habebitur enim eadem ratione figura C N O o, tum priori C A N, tum eidem collaterali G O N A




integrè, & particulatim (idest quò ad totum, & quò ad partes proportionales) prorsus æqualis; sicut viceversa, ubi figura C N O, vel etiam G O N A alteri adjacenti C A N integrè, & particulatim modo præscripto æqualis fuerit, ducta a b ramo N O parallela tanget curvam A a c in a; si enim ita non sit, alia igitur, quàm N O, parallela erit tangenti a b, unde alia figura, quàm C N O o, fiet particulatim, & integrè æqualis ipsi A a C N, adeòque & ipsi primæ C N O, vel G O N A; quod inferret æqualitatem totius cum parte; multarum igitur curvarum tangentes hac methodo determinabis; cave tamen partium ordinem hactenus indicatum adamussim observes, in lubrico enim, si quidquam immutaveris, te fore prævideo. Placet autem compendii causa figuras hactenus descriptas *invicem Correlatas* appellare.

6 Quoniam verò tangentium alias methodos dedimus, in negotio dumtaxat dimensionis figurarum paullò diutiùs immo-

morabimus, cujus ex hac methodo ſpecimina benè multa obvia ſunt. Proponatur primò figura N o o, cujus olim hanc geneſim excogitaveram ad circuli quadraturam promovendā. Norma ex regulis C N, N A ad angulum rectum C N A compoſitis in plano verticali circa punctum N ita convertatur, ut brachium N C determinatæ longitudinis exiſtens,

extremo ſuo C peripheriam quadrantis circularis C a a A deſcribat, brachium verò indefinitè extenſum N A infra orizontem versùs S inclinetur, ſeceturque in o à filo a o, pondere T perpendiculariter deſcendente extenſo, atque extremo regulæ N C, ſive N a alligato; itaque angulus a N o ſemper rectus erit; ſed & ducta circuli tangente a b rectus eſt N a b; æquidiſtat igitur N o tangenti a b; eſtque N o o figura quadranti Correlata; & ideò ſpatium curva N o o, radio N A, & aſymptoto A S interjectum æquale erit circulari quadranti C A N, ejuſque partes N o r, ſemiſegmentis arcu C a, ejuſque ſinu recto, & verſo comprehenſis æquales erunt, & zonæ o r r o zonis arcu a a, ordinatiſque ad axem N C interjectis æquabuntur, & interminata ſpatia o o r A S, ſpatiis

arcu A a, radio A N, & finu arcus a C determinatis; præterea sectores convexi N C a, cavis sectoribus N a o æquales erunt, & portiones, curva N o, ejusque subtensa N o comprehensæ, trilineis arcu a c, ejusque tangente, & intercepta axis portione definitis æquabuntur, & arcus C a ad ejus finum, sive ad N r, erit perpetuò, ut spatium N o a C ad rectangulum C N r, aut A N r, &c. Tangentem poscis ad quodlibet punctum o? divide bifariam N o; ex puncto divisionis ad punctum a junge rectam, quæ secabit N r in aliquo puncto; hinc juncta ad o tanget. Unde habetur, tangentem a b quadrantis N C A, productam usque ad radium N A, simul cum finu a r, seu linea o r ordinata Correlatæ N o o, & ramo N o, ac tangente, quam supra determinavimus ad punctum Correlatæ o, ipsum radium N A, usque ad occursum tangentis b a protensum, secare in harmonica proportione; seu abscissam N r ad subtangentem, quæ correspõdet puncto o, & ordinatæ o r, esse, ut o a cum a r ad ipsam a r. Eamdem lineam ab aliis postmodum descriptam inveni posita N o æquali abscissæ A S, sine relatione ad circulũ.

7 Spa-

7 Spatii Cycloidalis dimensio hinc etiam profluit; esto enim Cyclois A a O, cum circumscripto parallelogrammo

D N, ac per punctum N perpetuò feratur recta N O, parallela existens tangentibus Cycloidis a b, & occurrens ordinatis trilinei Cycloidalis, nempe ipsis a n productis in O. Constat figuram Correlatam, inde provenientem, N o o fore ipsummet semicirculum genitorem Cycloidis, quippe cujus chordis N o parallelæ sint dictæ tangentes Cycloidis, ut dudum Geometris innotuit, ac Torricellius indicavit, poteftq; ex generali nostra de tangentibus ex motuum compositione determinandis doctrina *cap.* 5. tradita sic paucis deduci. Gignitur Cyclois ex duplici motu, utroque æquabili, & æquè ve-

loci, altero per basim O D, cujus directio in puncto a est a d, altero per arcum semicirculi, cujus directio est tangens d B;

hac

hac igitur posita æquali lineæ da, seu ipsi arcui d A, juncta B a erit tangens, utpote diameter Rhombi laterum æqualium

a d, d B, adeòque in qua est directio motus ex duobus æquè velocibus per latera a d, d B compositi; verùm quia tam angulus C d A simul cum A d B, quàm angulus C A d, simul cum A d r rectum constituunt, estque C d A æqualis C A d, etiam B d A ipsi A d r æquabitur; duplus est igitur B d r ipsius A d B; sed & duplus unius ex æqualibus internis d B a; itaque anguli d B a, B d A sunt æquales, sed & alterni; æquidistat igitur tangens a B chordæ circuli genitoris A d. Quoniam igitur præscripta figura N o o est semicirculus genitor, atque

ex ea, quam nunc illustramus, doctrina, æqualis est integrè, & particulatim trilineo O a A N, hoc sublato ex parallelogrammo N A D O, quod ejusdem semicirculi, ex Archimedeis doctri-

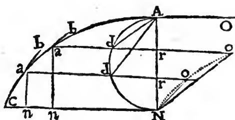
,ftrinis, five uti & nos in Vivianeis oftendimus ad *Pr.*36.*Cor.*1. eft quadruplum, refiduum fpatium femicycloidis O a A D triplum erit femicirculi genitoris. Sed & partium cavæ cycloidis, duabus tangentibus, & curva comprehenfarum dimenfio innotefcet; putà fpatium A b a femper æquale erit portioni circulari, arcu A d, ejufque chorda comprehenfi, eo quòd fpatium A d r fpatio, *vide fig.* 1. A a i, & triangulum A d r triangulo i b a fit æquale.

8 Sed & fpatia trilinearia, *redi ad fig.* 2. a d A a, arcu circuli d A, curva A a, & ordinata d a comprehenfa, dupla femper effe convincentur fegmentorum cycloidis, curva A a, & fubtenfa A a comprehenforum; fiquidem tota parallelogramma d A b a dupla funt integrorum triangulorum a A b; fed fegmenta cava cycloidis a A b, fimul cum fegmentis circularibus A d duplum efficiunt folius cavi cycloidalis fegmenti a A b; igitur reliqua trilinea a d A dupla erunt refiduorum fegmentorum convexorum cycloidis A a; unde & zonæ a d d a duplæ erunt fectorum cycloidalium a A a, duabus fubtenfis, & curva a a comprehenforum. Hinc fi ordinata a d effet ad femiffem altitudinis cycloidis, five per centrum C circuli genitoris tranfiret, quoniam tunc trilineum A d a quadrabile foret, utpote æquale ungulæ, feu figuræ finuum quadrantis, ad cujus arcum applicaretur, ideft æquale quadrato radii C d; tunc inquam fegmentum convexum cycloidis a A quadrabile pariter foret (Leibnitio etiam id demonftrante) nempe æquale femiffi quadrati radii; quòd fi ordinata a d r fit ad quartam altitudinis partem, itaut A r fit æqualis femiffi radii A C, quia fector circularis d A C duplus erit trianguli a d A (quippe in æqualibus bafibus d A, d a ad altitudinem C A duplam ipfius A r) & trilineum cycloidale d A a, ex nuper dictis, duplum eft fegmenti convexi cycloidis A a, erit tota figura a A C d a dupla fegmenti a A d, chorda A d, curva A a, & ordinatæ portione a d contenti; igitur dividendo, triangulum æquilaterum d A c æquale erit huic ipfi fegmento; quod proinde quadrabile erit; unde & quadrabile, quod additione trianguli d A r conficitur, femifegmentum a A r, ejufque duplum in integra cycloide, æquale nimirum æquilatero triangulo, quod

ge-

genitori circulò inſcribitur, utì Hugenio jam pridem innotuit; ſed & cycloidalia ſegmenta, quorum ſubtenſæ puncta conjungunt, alterum à tangente verticis, alterum ab ordinata per centrum circuli, æquè diſtantia facilem quadraturam admittunt, ſive ad eaſdem, ſive ad diverſas partes puncta jungantur, & zonæ binis ejuſmodi ſubtenſis interjectæ pariter quadrabiles inveniuntur, & ſegmenta, tum cycloidis, tum ſemicirculi genitoris, abſciſſa chordis, quarum extrema à verticis tangente, & à baſi æquè diſſita ſint ad eaſdem partes, æqualia oſtenduntur, ubi verò ad partes contrarias, æqualia ſemicirculo, ſimul cum rectangulo diametri in ſinum arcus reſpondentis, &c. in quibus immorari non vacat, quippe ad alia pergendum.

9 Quod etiam demonſtravit olim Hugenius, ſpatium Ciſſoide Dioclea ultra quadrantem continuata, ejuſque aſymptoto, & circuli genitoris diametro interceptum, triplum eſſe ſemicirculi genitoris, facillimè ex noſtra hac methodo deducitur, illud, ejuſq; ſingulas partes, cum cycloide, & ejus portionibus comparando. Sit enim ſemicyclois A C N, cujus ſemi-




circulus genitor A d N, ex quo etiam genita intelligatur Ciſſois N o o. Juncta ſubtenſa qualibet N o, atque ordinatis, ut in figura, patet junctam N d eſſe ipſi N o perpendicularem, propter d r, r N, r o continuè proportionales; æquidiſtat igitur ipſa N o chordæ A d, atque adeò & tangenti cycloidis a b; quod cùm ſemper eveniat, ſequitur totum ſpatium

in-

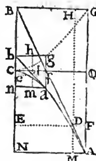
infinitè longum o N A O toti, ſemicycloidi, & ejus ſingulas partes N o r ipſis portionibus C a n, & or r o ipſi n a a n perpetuò adæquari; juncto autem ciſſoidi ſemicirculo A d N, totum ſpatium o o N d d A O ſemicirculi eſſe quadruplum, & partes o N d quadruplas ſegmenti N d, arcu ſcilicet, ac chorda his litteris deſignata comprehenſi, aut ſectores diametro A N, curvæ portione N o, junctiſq; ex A ad o chordis A o interjectos, eorumdem ſegmentorum circularium N d eſſe triplos, &c.

Si curva A a c fuerit Tractoria, qualem *cap.* 5. ſub finem *num* 2. deſcripſimus, cujus nimirum tangens a b eiuſdem ubique eſt longitudinis, utique ei Correlata figura o o G erit circuli quadrans, centro N, radio N A, quippe N O tangenti parallela, erit ubique æqualis, unde infinitum ſpatium à Tractoria, ejuſque Aſymptoto concluſum, quadranti circulari, radio tangentis deſcripto æquale demonſtrabitur, & partes proportionales ſegmentis congruis reſpondebunt.

10 Quid de parabolarum infinitis ſpeciebus addam? Sanè, reſumpta figura *numeri* 2. *hujus Capitis*, conſtat, ſpatium

N

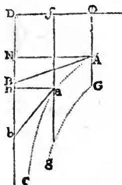
tium A a C g G esse duplicatum trilineũ parabolicum A C Φ, posito quòd ipsa C A N sit parabola quadratica, in qua subtangentes N B, sive iis æquales A G, duplæ sunt abscissarum N C, seu A Φ; itaque parabola A C N, utpotè æqualis spa-




tio A a C g G, erit dupla trilinei A C Φ, sui nimirum complementi ad parallelogrammum circumscriptum, adeòque æqualis erit $\frac{2}{3}$ ejusdem circumscripti parallelogrammi; ubi autem subtangens N B abscissæ N C tripla fuerit (utì accidit in parabola cubica, seu in curva, cujus ordinatarum N A, n a cubi fuerint, ut partes axis N C, n C à vertice abscissæ) erit, eadem ratione, figura A a C G, adeòque & ipsa parabola C A N, tripla trilinei C A Φ, & consequenter æqualis $\frac{3}{4}$ circumscripti parallelogrammi; ac generaliter habebit cujusvis speciei parabola ad trilineum, seu complementum parallelogrammi ipsum circumscribentis, eamdem semper rationem, quam exponens potestatis suarum ordinatarum ad exponentem potestatum axis; idest in quadratica, ut 2 ad 1. in cubica, ut 3 ad 1. in quadratoquadratica, ut 4 ad 1. &c. In ea, in qua cubi ordinatarum fuerint, ut quadrata abscissarum, ut 3 ad 2. & in qua quadratoquadrata ordinatarum sint, ut cubi partium axis, ut 4 ad 3, &c. quippe in hac ipsa ratione erunt semper subtãgentes conflantes figuram A C G, parabolæ æqualem, ad abscissas conflantes dictum trilineum, ut dudum Geome-

metris innotuit, poteſtque deduci ex generali tangentium conſtructione *cap.* 5. præſertim *num.* 4. & ſequentibus ad parabolas applicata.

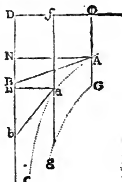
11 Eodem planè modo infinitas hyperbolas ad menſuram vocabis: Ac primò ſpatium Apolloniana hyperbola, ejuſque aſymptoto concluſum infinitum eſſe, ſic patebit: eſto talis hyperbola A a C, cujus aſymptoti Φ D, D B; manifeſtum eſt, ſubtangentes B N æquales eſſe diſtantiis à centro N D;




unde facta, juxta præſcriptum *num.* 2. figura g G A a C, erit perpetuò G A æqualis A Φ, g a æqualis a f, &c. & ſpatium g G A a C æquale ſpatio C a A Φ D b; ſed & idem æquale C a A N b; ſpatia igitur C a A Φ D b, & C a A N b ſunt æqualia; ſed primum excedit ſecundum parallelogrammo N A Φ D; ergo oportet utraque infinita eſſe; ex finitis enim, quod alterum ſuperat ſpatio finito, non eſt illi æquale, ſed tantùm in infinitis hoc locum habet; poſtea curva A a C ſupponatur eſſe hyperbola ſecundi gradus, in qua videlicet ordinatarum A Φ, a f quadrata reciprocè ſunt inter ſe, ut partes aſymptoti f D, D Φ; manifeſtum eſt ex dictis *cap. præcedent. num.* 9. diſtantias à centro D N, duplas fore ſubtangentium N B; itaque cùm ſemper in hoc caſu Φ A ſit dupla A G, f a

 du-

dupla a g; tota figura b D Φ A a C dupla erit ipſius g G A a C; adeòque dupla ſpatii huic æqualis C a A N b; & dividendo, ſpatium infinitum C a A N b æquale parallelogrammo hyperbolæ inſcripto N A Φ D. In hyperbola tertii, aut quarti gradus, propter diſtantias à centro triplas, & quadruplas ſubtangentium, colligetur, ſpatium C a A N b eſſe ſemiſſem, aut




trientem, &c. parallelogrammi D A; & generaliter eſſe illud ſpatium ad hoc parallelogrammorum, ut exponens diſtantiarum à centro Φ D ad exponentem ordinatarum Φ A diminutum exponente earumdem diſtantiarum; ſeu ſi exponens diſtantiarum ſit $y$, ordinatarum $x$, ut $y$ ad $x-y$, ſcilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 0. in ſecunda, ut 1 ad 1. in tertia, ut 1 ad 2. &c. in ea, in qua diſtantiarum quadrata eſſent, ut cubi ordinatarum, ut 2 ad 1. &c.

12 Spirales verò, aut quæ harum inſtar generari concipiuntur figuræ, numquid ab hujus methodi, & doctrinæ legibus excludentur? imò & ipſæ illius influxum in ſe derivare poterunt, ſed ſuæ naturæ contemperatum; figura enim ex ſubtangentibus ad reſpectiva puncta radii applicatis, non quidem æqualis, ſed dupla ſemper erit Spiralis figuræ ſibi correſpondentis, eò quòd harum figurarum elementa non ſint parallela,

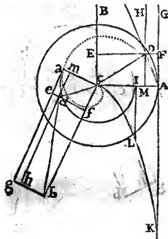
&

& parallelogrammis analoga, sed convergentia, & triangulis parallelogrammorum subduplis respondentia. Exempli gratia in Spirali Archimedea ad quemvis radium A C, vel a C ducta ex centro perpendiculari C B, aut C b æquali peripheriæ radii C A, aut respectivè arcui a I, qualem radius assumpto puncto A, vel a in sui conversione eò usque descripsit,

patet ex Archimede, imò & ex dictis *cap.* 5. *num.* 9. junctam B A, seu b a tangentem esse (debes autem mi Lector concipere, utut Schemma defæcerit, lineam b d directè tendere in a, ibidemque Spiralem tangere, & lineam A D concurrere cum C B in B, unde ducta quædam radio parallela occurrat parallelis subtangentis C B ductis ab extremo radii A, & à quovis tangentis puncto D, ipsis scilicet A F, D M, in punctis G, H, uti in minusculis litteris ipsa g b occurrit homonymis, & homologis lineis in g, h, atque demùm per D, seu d punctum radio parallelam actum esse, utì vides, F D E, f d e) puncto igitur D, seu d assumpto, quod contactui quàm proximum sit, completisque parallelogrammis D G, D C, seu d g, d c æqualibus, utpotè complementis parallelogram-

mo-

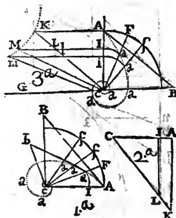
morum circa diametrum, patet junctis D C, d c, triangula C D A, C d a esse semissem æquè altorum, & eamdem basim obtinentium parallelogrammorum C A F E, C a f e; quare & semissis erunt æqualium illis parallelogrămorum M A G H, m a g h; cùmque hæc triangula excedere possint Spirale spatium C A a C minori excessu quolibet dato, constat ipsum




integrum Spirale spatium omnium ejusmodi parallelogrammorum M G, m g ad minimam latitudinem redactorum, & in unam figuram confluentium (quod fit, ipsis lineis A G, a g ad respectiva puncta ejusdem radii C A in eadem à centro distantia applicatis, scilicet A G in A K, a g in I L, existente C I æquali ipsi C a, & sic ubique, quousque compleatur figura C L K A, quæ in hoc casu erit trilineum parabolicum, eò quòd subtangentes, quemadmodum & arcus, quibus æquãtur, in duplicata radiorum ratione procedunt, ut monuimus *eodem cap.* 5. *num.* 9.) subduplum esse; atque adeò cùm tale trilineum C K A, duplum spiralis spatii, constet, ex dimensione parabolæ, esse duos trientes trianguli sub radio C A ut altitudine, & A K ut basi, idest duos trientes circuli radio C A,

aut

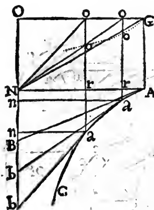
aut correſpondentis ſectoris radio a C, vel C I deſcripti, & ipſum Spirale ſpatium circumſcribentis, habetur, ſpiralia ſpatia trientem eſſe circularium ſectorum eadem circumſcribentium. Similiter aliarum ſpecierum ſpiralia ſpatia per correſpondentia trilinea parabolica *cap. 5. citat.* indicata metiri poteris, & cum ſectoribus circumſcriptis comparare; ſed & Spiralem Geometricam, ſeu Logarithmicam A a a invenies




comprehendere, poſt infinitos ſibi ſuperimpoſitos cincinnos, cum radio C A ſpatium ſubduplum circumſcripti trianguli A B C; figura enim C L K A ex ſubtangentibus ad congrua radii puncta applicatis hic in triangulum degenerat, quia ob æqualem ſemper inclinationis angulum C A B, C a b, triangula rectangula C A B, C a b ſimilia evadunt; & ſubtangentes C B, C b, ſeu his æquales A K, I L in eadem radiorum A C, C a, vel C I ratione; Unde habes confirmationem eorum, quæ *cap. præced. num.* 10. *&* 11. circa hujus ſpatii comparationem attulimus.

13 Hanc igitur tot exemplis illuſtrem doctrinam ad propoſitum applicantes, ſeptimum Hugenii Theorema ſic demonſtra-

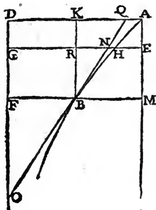
strabimus. Subtangentes Logisticæ A a a C sint N B, n b, n b, quæ ad respectiva puncta A, r, r applicatæ A N referantur in A G, r o, r o; est igitur figura N A G o O æqualis spatio post ordinatam A N, asymptoto, & curvæ interjecto, juxta hanc doctrinam; verùm & idem spatium N A G convincitur esse rectangulum subtangentis N B in ordinatam




N A, eò quòd ex dictis *cap.* 5. subtangentis longitudo N B, n b, sive jam A G, r o, sit semper eadem; itaque spatium infinitum, quod post quamvis Logisticæ ordinatam exporrigitur, æquale est rectangulo sub eadem ordinata, & subtangente, atque adeò est duplum trianguli ejusdem basis, & altitudinis, quod ordinata, tangente, & subtangente comprehenditur, uti Clarissimus Auctor in hoc Theoremate nobis demonstrandum proposuit.

14 Sed & sequens Theorema octavum, videlicet, quòd *spatium duabus ordinatis interjectum æquale est rectangulo subtangentis in differentiam earumdem ordinatarum, uti in sequenti figura spatium A D F B æquatur rectangulo subtangentis F O in K A*, quod quidem *cap.* 4. *num.* 4. satis ostensum est, at-

atque ex iis , quæ aliàs diximus, facilè oſtendi poteſt, ex hac ipſa doctrina iterum ex abundanti demonſtrari poteſt, quippe in figura paragraphi antecedentis, nedum totum ſpatium infinitum C A N B toti rectangulo N A G O probatur æquale , ſed & ejus pars quælibet N A a n parti




correſpondenti A r o G, ex ſubtangentibus curvæ A a ad ipſam A r applicatis genitæ, quæ eſt rectangulum ſubtangentis in differentiam ordinatarum ; nec juvat ampliùs hìc immorari .
Ad ſolida tranſeamus.

* *
*

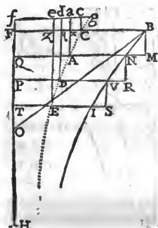


# CAPUT IX.

*Prima Noni Theorematis demonstratio. Hinc solida omnia ex infinitis Logisticæ spatiis esse ostenduntur, ut quadrata radiorum basis, & portiones, ut differentiæ quadratorum à radiis extremis. Alia Logistica in duplicata ordinatarum prioris ratione spatium comprehendit prioris subduplum, item subtangentem subduplam habet: generaliter quæcumque fuerit Logistica, ejus spatium, & subtangens tam submultiplex erit prioris, quàm submultiplicata ordinatarum ratio. Idem nonum Theorema secundò demonstratur. In Correlatis figuris solidum ab exteriori duplum semper est solidi, quod ab interiori circa axem revoluta describitur, & partes partium respondentium. Hinc tertia ejusdem Theorematis demonstratio. Dimensio solidi ex figura quadranti correlata, ejusve partibus tum concavis, tum convexis, item solidorum ex trilineo cycloidis, ipsave semicycloide circa tangentem verticis revoluta, ejusque partium. Solidorum quoque ex spatio Cissoidis concavo, aut convexo, tum circa asymptoton, tum circa ei parallelam ex vertice. Conoidum ex infinitis parabolis ad circumscriptos cylindros, vel conos, item solidorum ab infinitis hyperbolis ratio ad inscriptos cylindros nota.*

1 IN hoc nono Theoremate ita pronunciat Hugenius: *Solidum*, inquit, *productum ab infinito spatio post aliquam ordinatam in conversione circa asymptoton est sesquialterum Coni,* cu-

*cujus altitudo aequetur subtangenti, & basis semidiameter aequalis sit ordinatae: ita solidum productum ab infinito spatio B F O I in conversione circa F O, sesquialterum est Coni geniti ex triangulo B F O circa eamdem F O revoluto.* Hujus prima demonstratio sic institui potest. Intelligantur huic solido circumscripti innumeri cylindri F M, Q R, P S, &c. aequalis ubique altitudinis F Q, Q P, P T, &c. indefinitè exiguae, itaut horum

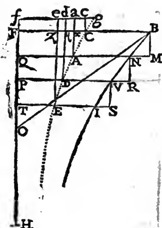



cylindrorum congeries pro ipso rotundo solido sumi queat, & tangentis O B portiuncula primo cylindro F M intercepta ferè cum ipsa curva B N coincidat, seu ad ipsam obtineat rationem minorem qualibet inaequalitatis majoris ratione assignabili (hoc enim ex vulgatis methodis fieri potest) designetur etiam O H aequalis subtangenti O F.

2 Jam sic: Haec series cylindrorum, qui inter se sunt, ut basium F B, Q N, P V continuè proportionalium quadrata, est quaedam Geometrica progressio solidorum proportionaliũ in infinitum continuata; igitur ex demonstrationibus, sive Cavallerii, sive Torricellii, sive Gregorii à S. Vincentio, omniũ terminorum aggregatum (idest rotundum solidum, de quo loquimur) erit ad primũ terminũ (scilicet ad cylindrum M F)

O 2 ut

ut ipse primus terminus ad primam differentiam, hoc est, ut quadratum FB ad ejusdem differentiam à quadrato QN, vel ut quadratum FO ad rectangulum HQF, quo differt ipsum quadratum FO ab OQ ex vi constructionis, & hypothesis præmissæ. Cùm ergo ratio solidi rotundi ad inscriptum conum, ex triangulo BOF genitum, componatur ex ratione talis solidi ad primum cylindrum FM, & ex ratione ejusdem




cylindri FM ad conum FBO, quarum prima, ex dictis, est eadem, quæ OF quadrati ad rectangulum HQF, secunda verò eadem est, quæ QF ad trientem altitudinis OF propositi coni, aut rectanguli HQF ad HQ in trientem OF, ideò erit solidum rotundum Logisticæ ad prædictum conum ut quadratum OF ad rectangulum HQ in trientẽ OF, nempe in composita ratione ex OF ad QH (quæ est ratio subdupla, propterea quòd HQ differat ab HF differentia QF indefinitè parva, & re ad minimos cylindros redacta, penitus evanescente) & OF ad trientem sui, quæ est ratio tripla; ex his autem composita ratio est sesquialtera, ut patet in his numeris 3, 6, 2, itaque solidum ex Logistica circa axem FO revoluta sesquialterum est Coni ex inscripto, & per tan-

gen-

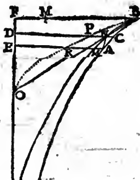
gentem determinato triangulo FBO: Quod erat demonstrandum.

3 Hinc nullo negotiò deducitur, rotundum solidum à spatio post AB infinito, ad solidum rotundum à spatio item infinito post aliam ordinatam CV ad invicem esse, ut quadrata BA, CV, quippe & horum solidorum subsesquialteræ magnitudines, nempe inscripti coni, ob eamdem altitudinē subtangentis, sunt ad invicem, ut quadrata radiorum basis; necnon solida ex portionibus AVCB, BADQ esse ad invicem, ut differentias quadratorum AB, CV, & AB, QD, sive, ut armillas circulares ab VE, & DK circa BQ revolutis descriptas, vel hæc solida ad invicem esse, ut respondentia spatia geometricæ spiralis, per hujus Logisticæ convolutionem, axe BC in punctum contracto, provenientia; quæ omnia etiā argumentis *cap.* 3. adductis in demonstratione primi Theorematis, confirmari potuissent, intellectis nimirum loco parallelogrammorum Bz, xz, &c. totidem cylindris, eademque prorsus demonstratione applicata.

4 Nobis aliam hujus veritatis demonstrationem meditantibus illud ostendendum occurrit, quòd si intra Logisticam BCA describatur ad eamdem asymptoton, eamdemque

or-

ordinatam F B alia Logistica B N M, cujus ordinatæ sint, ut quadrata prioris Logisticæ, faciendo nimirum ubique, ut F B




ad D C, ita D C ad D N, & ut F B ad E A, ita E A ad E M, &c. Spatium à Logistica F B N M comprehensum subduplum erit spatii à Logistica F B C A comprehensi; sumpta enim quavis ordinata D N C, ac posita E F dupla F D, ordinetur E M A; est igitur in priori Logistica F B ad D C, ut D C ad E A; sed etiam ex constructione ita D C ad D N ordinatam posterioris Logisticæ; æquales sunt igitur D N, & E A; & hoc semper; ordinantur autem E A in spatio F B C A ad altitudinem E F semper duplam altitudinis F D interceptæ ab æquali ordinata D N in spatio F B N M; igitur ex Proposit. 1. nostræ Appendicis ad Demonstr. Vivian. Probl. erit spatium F B C A duplum ipsius F B N M. Q. e. d.

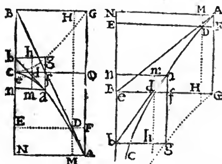
5 Colliges spatium F B N M æquale esse triangulo F B O per tangentem prioris Logisticæ B O determinato, siquidem & hujus duplum est, ex Theoremate septimo Hugeniano, idem spatium F B C A; necnon evidens est, subtangentem Logisticæ posterioris F B N M fore semissem ipsius O F, quippe ejus rectangulum in F B æquale foret spatio F B N M, uti & prædicto triangulo; imò generaliter, quàm submultiplicata fuerit ratio ipsarum D N, D C, rationis D N, F B, tam submultiplex fore spatium à Logistica B N M comprehensum

spa-

ſpatii comprehenſi ab ipſa BCA, & tam ſubmultiplices pariter fore ſubtangentes hujus, ſubtangentium illius.

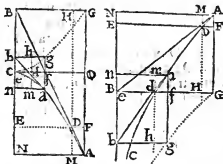
6 Ut altera igitur propoſiti Theorematis demonſtratio compleatur, triangulo OFB ad verticem O inſcriptum eſto trilineum parabolicum ORPBF, cujus ad verticem tangens OF; manifeſtum eſt, Conum ex OBF circa FO proportionaliter analogum eſſe trilineo OPBF, quippe, ut circuli, vel quadrata radiorum BF, ND, ita lineæ BF, DP; quemadmodum & ſpatium FBNM ſupra deſcriptum proportionaliter analogũ eſt ſolido rotundo ex Logiſtica FBCA circa FO, eò quòd circuli, vel quadrata radiorum FB, DC ſint ut lineæ FB, DN; ita erit igitur ſolidum ex FBCA ad Conum ex FBO, quemadmodum ſpatium FBNM, ideſt ex *præced. num.* triangulum FBO, ad trilineum FBPO; nempe in ratione ſeſquialtera. Q. e. d.

7 Duas alias adhuc diverſas ejuſdem Theorematis demonſtrationes afferre poſſem, ſed ne longior ſim, & alteri longè utiliori locum aperiam, hac dumtaxat contentus ero, quàm tertio loco ſubjungam, atque ut Lectores patienter attendant enixiùs rogabo. Semen fœcundiſſimum eſt, unde illa pullulat, quippe illi, quod *præc. cap. nu.* 2. ſevimus, atq; unde tot fructus



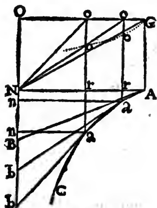

abundè collegimus, agnatum penitus, atque congeneum eſſe reperies. Sint igitur eædem Correlatæ figuræ, quas loco citato deſcripſimus, gGAaC, & NAaC; utraque autem circa

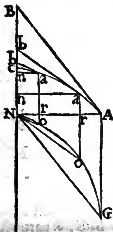
ca axem N B convertatur; ajo solidum à spatio primo, & exteriori productum duplum esse solidi à secundo, & interiori spatio geniti; facta enim eadem, ut priùs, constructione, cùm parallelogrammum N F æquale sit ipsi M G, utroque circa N B revoluto, cylindrus ex primo erit ad tubum cylindricum genitum ex secundo, ut dimidia N A (quæ est distantia centri




gravitatis ipsius N F ab axe motus) ad mediam arithmeticam inter M N, & A N (quæ est distantia centri gravitatis M G ab eodem axe) hæc autem media arithmetica in parallelogrammis infinitè exiguæ latitudinis, atque adeò in ipsismet solidis, in quæ tandem desinunt tubi illi cylindrici, punctis M, A, coincidentibus, & omni latitudine M A penitus evanescente, est ipsissima linea N A; itaque, cùm idem ratiocinium valeat in omnibus aliis cylindris ex n f, & tubis cylindricis ex m g in tali conversione spatiorum genitis, erit semper unusquisque cylindrus solidi ex interiori figura ad quemlibet tubum solidi ex figura exteriori, ut dimidia N A ad totam N A, ut dimidia n a ad totam n a, semper nimirum in ratione subdupla; solidum igitur ex interiori figura C a A N est semissis solidi ex figura exteriori g G A a C. Quod erat demonstrandum.

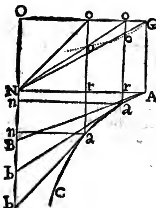
8 Directè autem depressis, aut evectis lineis singulis A G, a g, ut jam non ad ipsam curvam A a C, sed ad basim N A ipsarum extrema pertingant, quemadmodum *cap. praecedenti num.* 3. monuimus non variari figuræ quantitatem, sed eamdem esse figuram N o o G A hinc provenientem, ac quæ




priùs erat g G A a C, ita pariter constat, idem solidum ex ipsa o o G A N circa N B revoluta proventurum, quod priùs ex g G A a C, propter servatam eamdem linearum A G, & O r tum longitudinem, tum distantiam ab axe motus, adeòque easdem cylindricas superficies hæc solida componentes; duplum est igitur solidum ex figura o o G A N, solidi ex C a A N ( facta circa N B utriusq; rotatione ) descripti; imò & partes partium respondentium, videlicet solidum, quod ex portione N r o, duplum solidi ex C a n ( acceptis o r, & n a homologis, scilicet in idem a punctum convenientibus ) & quod ex o r A G, duplum ejus, quod ab A a n N, ob eamdem rationem.

9 Tertia igitur propositi Theorematis Hugeniani demonstratio sic expedietur. Esto Logistica A a C. Constat ex dictis *cap. praeced. num.* 13. ei Correlatam figuram esse parallelogrammum N A G O, quod si circa axem Logisticæ rotetur

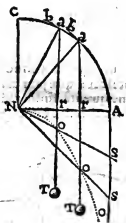



cylindrum producet triplum coni ab inscripto triãgulo N A B ejusdem basis, & paris altitudinis; cùm igitur ex ea, quam hìc adduximus, doctrina solidum ex Logistica circa axem sit subduplum præfati cylindri ex parallelogrammo N A G, erit solidum Logisticæ ad conum illum inscriptum in ratione composita ex subdupla, inter ipsum, & cylindrum intercedente, & ex tripla inter cylindrum, ac dictum conum reperta; Ratio autem ex his composita ( ut ad finem *num.* 2. indicavimus ) est sesquialtera; quare, &c.

10 Sed & hinc pariter constat dimensio portionum ejusdem solidi, putà ejus, quæ à parte n a A N circa n N rotata generatur, quippe quæ demonstretur semissis tubi cylindrici ex correspondente parallelogrammo A r o circa eumdem axem converso geniti, idest æqualis cylindro, basi differentia circulorum A N, N r, altitudine vero semisse subtangentis; indeque subtracto cylindro ab inscripto parallelogrammo n a r, residuũ æquale erit annulo ex spatio trilineari a r A circa axem re-

revoluto, quod proinde notam rationem habebit, sive ad aliũ annulum a r A, sive ad tubum cylindricum ex parallelogrammo, quod sibi circumscriberetur; & hoc *cap.* 7. *num.* 14. desiderabatur ad spatia quædam trilinearia Spiralis Geometricæ, tum ad invicem, tum ad circumscriptas armillarum circulariũ portiones comparanda, ut ex ibi dictis constat. Calculum ineat qui volet. Nobis colligendi sunt fructus ex doctrina *num.* 7. & 8. indicata uberrimè manantes, imò veriùs Lectoribus indicandi, ne voluptatem illos per se decerpendi eisdem invidisse videamur.

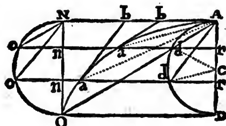
11 In primis igitur in figura quadranti Correlata, *cap. præc. num.* 6. descripta, patet, nedum integrum spatium S A N o O circa N C revolutum, producere solidum æquale spheræ radio N A descriptæ, quippe duplum hemisphærii ex conversione quadrantis C A N; sed & quarum spheræ portionum



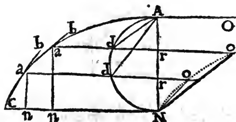

duplæ sint portiones ejusdem solidi à partibus concavis N o r descriptæ, ac consequenter cui solido æquales conoides à convexis etiam portionibus, curva N o, & axe C N producto interceptis, ordinataque ex o ipsi r N parallela terminatis, & circa eumdem axem conversis, & tam facile erit, sive ali-

quod ex hujusmodi conoidibus, sive ex solidis à spatio cōcavo descriptis in data ratione dividere, quā facile est in sphæræ portionibus, & residuis cylīdrorū illas circūscribentiū idē præstare.

12 Cycloide O a A N circa tangentem verticis A N revoluta, patet solidum inde proveniens esse subduplum annuli ex



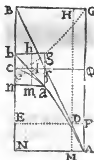

semicirculo N o O circa eamdem tangentem converso: unde & residuum cylindri illi solido circumscripti, idest solidum, quod ex semicycloide convexa O a A D circa tangentem verticis conversa describitur, notæ dimensionis erit, imò & ejus partium mensura innotescet: quæ jam pridem inter Geometras magna sollicitudine quæsita fuisse video. Idem in Cissoide præstandum, cujus quidem ex nota proprietate linearum




A r, r d, r N, r o proportionalium, obvia est dimensio soli-
di

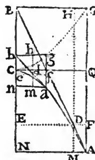
di ejus conversione circa asymptoton A O descripti, quippe utì rectangula A r o, d r N æqualia inde ostenduntur, adeòque & cylindricæ superficies ab iis descriptæ, ita integrum illud Cissoidale solidum, integro annulo ex semicirculo genitore circa tangentem in N revoluto, & partes partibus correspondentibus æquari manifestum est; ex nostra verò doctrina manifesta etiam evadit dimensio solidi ex eodem cavo cissoidali spatio o o N A O circa N n revoluto, ejusque partium, per comparationem ad fusum Cycloidale ex C A N, ejusque partes; imò & innotescet dimensio Conoidum ex spatiis convexis, curva N o o, & axe n N producto, ac ordinata ex o ipsi r N parallela terminatis, quippe residua cylindrorum ex rectangulis N r o productorum. Solidum ex Tractoria subduplũ pariter invenies hemisphærii ex quadrãte sibi correlato, &c.

13 In parabolis cujusvis generis C a A, Conoides ex figura C A N circa axem C N habebit semper ad circumscriptum cylindrum ex C ● N A rationem notam; nota quippe est ratio axis N C ad subtangentem N B, unde




& ratio cylindri ex C ● N A ad cylindrum ex B G A N, quæ eadem est; cylindrus autem B G A N componitur ex solido ex C g G A N (quod semper est triplum Conoidis ex C A N, quippe solidum ex C a A G g hujus semper est duplum) & ex conoide ex C g G B, cujus ratio ad ipsum

ſum CAN eadem ſemper eſt, quæ CB ad CN, cb ad cn, juxta Propoſit. 1. Append. noſtræ Vivian. Probl. adeòque eſt ad illum in quadratica, ut 1 ad 1. in cubica, ut 2 ad 1. in quadratoquadratica, ut 3 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum ſunt, ut quadrata ex ſagittis, ut 1 ad 2, & univerſaliter ſi ordinatarum exponens ſit $x$, partium verò axis $y$, ut $x$ minùs $y$ ad $y$; itaque ſemper cylindrus ex BGAN erit ad conoidem ex parabola CAN circa axem revoluta, ut $3y + x - y$ ad $y$; ſcilicet in quadratica, ut 4 ad 1. in cubica, ut 5 ad 1. in ſequenti, ut 6 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum reſpondent quadratis ſagittarum, ut 7 ad 2. in qua verò quadratoquadrata reſpondent cubis, ut 10 ad 3, &c. Vel ſic etiam calculus inſtitui poteſt;




quoniam cylindrus ex BGAN triplus eſt coni ex triangulo BAN; ſolidum item ex CgGAN triplum Conoidis CAN; reliqua etiam conois ex CgGB tripla erit ſolidi ex trilineo CAB; eſt verò, ex dictis, Conois CAN ad Conoidem CgGB convertendo, ut $y$ ad $x - y$; ergo ex æquo Conois CAN ad ſolidum ex trilineo CAB eſt, ut $y$ ad $\frac{x-y}{3}$ ſive, ut $3y$ ad $x - y$; & componendo, ac per converſionem rationis, conus BAN ad conoidem ex inſcripta parabola, ut $2y + x$ ad $3y$; nempe in quadratica, ut 4 ad 3, in cubi-

bica, ut 5 ad 3, in quadratoquadratica, ut 6 ad 3, in ea, in qua cubi comparantur quadratis, ut 7 ad 6, &c.

14 Non difficilior infinitarum hyperbolarum tractatio erit. Sit quævis hyperbola C a A inter asymptotos B D Φ; & huic correlata figura g G, cujus ordinatæ A G, a g æquales subtangentibus N B, n b. Quoniam ex dictis *cap.* 7. *num.* 9. est

D N ad N B, seu Φ A ad A G perpetuò, ut exponens ordinatarum A Φ ad exponentem distantiarum Φ D, videlicet, ut $x$ ad $y$; etiam solidum ex spatio C a A Φ D circa D B ad solidum ex g G A a C circa eumdem axem, (quippe quorum cylindricæ superficies à lineis Φ A, A G, & f a, a g eamdem perpetuò rationem observant) ut $x$ ad $y$; unde idem antecedens solidum, ad solidum ex C a A N, quod est juxta nostram doctrinam, solidi consequentis subduplum, erit ut $x$ ad $\frac{1}{2}y$; vel ut $2x$ ad $y$; & dividendo, cylindrus ex inscripto parallelogrammo Φ A N D ad solidum ex spatio infinitè longo C a A N erit, ut $2x - y$ ad $y$; scilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 1 (uti jam Torricellius ostendit) in secunda, seu quadratica, ut 3 ad 1, in tertia, seu cubica, ut 5 ad 1, in quarta, seu quadratoquadratica, ut 7

ad

ad 1; & ſic ſemper, ſumpto antecedente juxta imparium numerorum progreſſionem; quod ſi cubi ordinatarum ad diſtantiarum quadrata comparentur, ratio invenietur, ut 4 ad 2, ſeu 2 ad 1; ſi quadratoquadrata illarum ad iſtarum cubos, ut 5 ad 3, &c. Alia exempla, aliæque ſpeculationes non deerunt, ſi Lectoris induſtria hiſce veſtigiis inſiſtens in feraciſſimos Geometriæ campos ſe confert.



# CAPUT X.

*Decimum Theorema proponitur, ac prima demonſtratione ſtabilitur. Infinita ſeries terminorum proportionalium æquatur maximo ducto in exponentem rationis, ac diviſo per eumdem exponentem unitate minutum. Ex hoc demonſtrandi modo, tum finitæ, tum infinitæ ſeries æquales oſtenduntur ſummæ, vel differentiæ duarum poteſtatum, per ſummam, vel differentiam radicum diviſæ, &c. Solidum rotundum, de quo in hoc Theoremate, per infinitæ ſeriei calculum admenſuram redigitur. Subtangentes Logiſticæ in ordinata acceptæ ſunt, ut rectangula Logiſticæ inſcripta. Solidum ex quovis Logiſticæ ſpatio circa ordinatam revoluto ad inſcriptum cylindrum eſt, ut congruum trilineum ad inſcriptum triangulum. Hæc ratio nota eſſe oſtenditur. Annulis quoque latis per hæc ſpatia progenitis demonſtratio applicabilis eſſe indicatur.*

De-

1 DEcimum Auctoris nostri Theorema inventu, fateor, difficillimum mihi fuit, duas tamen, aspirante Geometriæ Præside, ejus demonstrationes, eo, quod sequitur, medio tandem extundere potui: *Solidum*, inquit, *productum ab eodem infinito spatio in conversione circa ordinatam B F, post quam exporrigitur, sextuplum est Coni geniti ex triangulo B F O in conversione circa B F*. Fiat enim angulus E F H semirectus,

& ordinatæ N D, M E in Logistica extendantur ad lineam F H in G, H. Concipiatur modò solidum ex triangulo H F E, (ad partes H E indefinitè protenso simul cum Logistica) in spatium Logisticæ F B M E, quod conflabitur ex totidem rectangulis G D N, H E M, &c. Aut etiam, ut in Vivianeis indicavimus ad Schol. propos. 6. pag. 51. Spatium Logisticum F B N M ita erectum, ut perpendiculare fiat plano H F E, per quod motu sibi semper parallelo fluere intelligatur, ut partes ipsius Logisticæ lineam F H prætergredientes deinceps evanescant, itaut, cùm Logistica attigerit punctum G, ejus portio F D N B defæcerit, solaque remanserit residua post D N versùs E M in infinitum protensa, ubi verò attigerit punctum H, defæcerit pars E F B M, solaque re-

ſidua fuerit quæ poſt E M in infinitum extenditur, &c. Jam conſtat ex prima geneſi, hoc ſolidum fore ad rotundum ex Logiſtica circa ordinatam B F revoluta, ut radius cujuſpiam circuli ad ejus circumferentiam; quæ enim lineæ D N, E M in ſolido ſupra deſcripto ducerentur in G D, H E, æquales ipſis D F, E F, in rotundo ſolido circa F B ducerentur in peripherias ab eiſdem radiis D F, E F, deſcriptas in rotatione earumdem ordinatarum D N, E M. Rurſus ex ſecunda geneſi ejuſdem priùs deſcripti ſolidi, patet illud fore æquale

F B G D I N K O C H E M

priſmati altitudine ſubtangentis O F, baſi verò integro Logiſticæ ſpatio F B N M, ideſt, per dicta *cap.* 8. in demonſtratione Theorematis ſeptimi, baſi ipſo rectangulo O F B. Ratio eſt, quia ſolidum illud, juxta ſecundam geneſim conſideratum, habet pro baſi ſpatium F B M, & ad punctum G, ſive ad altitudinem G D habet ſectionem baſi parallelam ſpatium infinitum poſt D N extenſum, ſicut & ad altitudinem E H ſpatium infinitum extenſum poſt E M, &c. quemadmodum & priſma, baſi ſpatio F B N M, altitudine O F, ſecari poſſet in rectangulum, O F B æquale ipſi F B M, & ad diſtantiam F D (æqualem D G) ſecaretur in rectangulum ex O F in D N æquale ſpatio infinito poſt D N, necnon & ad diſtantiam E F

(æqua-

(æqualem E H) in rectangulum ex O F in E M æquale spatio post E M infinitè protenso, &c.

2 Ratio igitur solidi rotundi ex spatio F B M E circa F B rotati ad conum ex triangulo O B F, utpote composita ex ratione dicti solidi rotundi ad prisma altitudine O F, basi spatio F B M, vel rectangulo O F B, & ex ratione hujus ipsius prismatis ad dictum conum, componetur ex ratione circumferentiæ radii O F ad radium O F, (vel, assumpta communi altitudine O C, dicas ex ratione cylindricæ superficiei descriptæ ab O C ad rectangulum F O C) & ex ratione dicti prismatis ad designatum conum (scilicet ex composita rursus ex ratione rectanguli F O C ad triangulum F O B, & ex O F altitudine prismatis ad circumferentiam ex triente O F, quæ est distantia centri gravitatis trianguli ejusdem ab axe motus, juxta celeberrimam regulam Guldinianam, seu dicas ex ratione trianguli ejusdem O F B ad triangulum ex triente circumferentiæ ab O F descriptæ in ipsam O F, vel O C) hæ autem rationes componunt rationem sextuplam; cylindrica siquidem superficies ab O C in conversione circa F B descripta (quæ est primus terminus) cùm tripla sit cylindricæ superficiei ejusdem altitudinis in trientem dumtaxat peripheriæ ex O F, sive in peripheriam trientis O F, sextupla erit trianguli ex tali triente circumferentiæ in O C, vel F B (quod est ultimus terminus) utpote subdupli cylindricæ superficiei ejusdem altitudinis, & basis. Solidum igitur rotundum ex Logisticæ spatio F B M circa F B revoluto, sextuplum est Coni ex O F B triangulo inscripto circa eamdem ordinatam rotato. Quod erat demonstrandum.

3 Alia ejusdem Theorematis demonstratio assumptum hoc, jam inter Geometras pervulgatum, præsupponit, quòd scilicet quælibet infinita series terminorum continuè proportionalium æqualis est maximo termino ducto in exponentem rationis, & diviso per eumdem exponentem unitate minutum; sit verbigratia communis ratio infinitorum terminorum illa, quam habet $a$ ad 1; sitque maximus terminus $m$; erunt igitur termini isti per ordinem

Q 2 $m$,

$m, \frac{m}{a}, \frac{m}{aa}, \frac{m}{a^3}, \frac{m}{a^4}$, &c. in infinitum: dico omnes ſimul æquari $\frac{ma}{a-1}$; multiplicentur enim ſinguli ex propoſitis terminis per $a-1$: fiet $ma-m, +m-\frac{m}{a}, +\frac{m}{a}-\frac{m}{aa}, +\frac{m}{aa}-\frac{m}{a^3}$, &c. ubi conſtat, omnes terminos poſt $ma$ ſe mutuò elidere, qui enim priùs negantur, iidem immediatè poſt affirmantur; atque adeò omnes æquantur ſoli priori producto $ma$; igitur è contra dividendo per $a-1$, fient $m+\frac{m}{a}, +\frac{m}{aa}+\frac{m}{a^3}+\frac{m}{a^4}$, &c. in infinitum æquales $\frac{ma}{a-1}$ quod enim multiplicatio conficit, hoc ipſum diviſio retexit. Vel ſic: In propoſitis terminis proportionalibus, ut una differentia ad unum terminum (putà ut $a-1$ ad $a$) ita omnes ſimul differentiæ (ideſt ipſe maximus terminus $m$, in quo differentiæ omnes includuntur) ad omnes terminos, qui proptereà æquales eſſe debent $\frac{ma}{a-1}$. Q. e. d.

4 Priorem demonſtrandi modum, qui clarior eſt, atq; me judice, omnium facillimus, indicavi jam in Vivianeis ad finē pag. 150. atque expeditiſſimum innumeris veritatibus demonſtrandis Lector inveniet, ſi in illo ſemet tantiſper exercere non dedignetur. Exempli cauſa in ſeriebus finitis, deprehendet differentiam quarumlibet homogenearum poteſtatum, diviſam per differentiam radicum earumdem, æquari aggregato tot terminorū continuè proportionaliū, uno gradu depreſſiorū, quot fuerint unitates in earum poteſtatum exponente; putà

$$\frac{aa-bb}{a-b} = a+b$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} = aa+ab+bb$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b} = a^3+aab+abb+b^3$$

&c. mul-

multiplicando enim per $a - b$ terminos primæ æquationis, fit $aa - ab + ab - bb = aa - bb$, ob reliquos terminos se mutuò elidentes; item multiplicando terminos æquationis secundæ, habetur $a^3 - baa + baa - abb + abb - b^3 = a^3 - b^3$ ob eamdem rationem; similiter in aliis idem eveniet. Differentiam autem quarũlibet homogenearum potestatum gradus à numero pari denominati, vel summam gradus denominati ab impari numero, divisam per summam radicum, æqualem deprehendes aggregato similium terminorum, ut supra, sed alternatis affirmationis, & negationis signis: verbi gratia

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = aa - ab + bb$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - aab + abb - b^3$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3 b + aabb - ab^3 + b^4$$

&c.

Nam multiplicando terminos per denominatorem $a + b$ fit in prima æquatione $aa + ba - ba - bb = a^2 - b^2$, in secunda æquatione fit $a^3 + baa - aab - abb + bba + b^3 = a^3 + b^3$ cæteris se elidentibus; in tertia, & quarta, aliisque infinitis idem proveniet.

5 In seriebus autem infinitis: proponatur summa quarumvis potestatum divisa per differentiam radicum; dico æquari tot terminis uno gradu depressioribus, & continuè proportionalibus, quotus est potestatum gradus, cum dupla serie infinitarum fractionum similiter proportionalium, pu-

putà $\frac{aa+bb}{a-b} = a+b+\frac{2bb}{a}+\frac{2b^3}{aa}+\frac{2b^4}{a^3}$ &c.
Hos quippe multiplicando per $a-b$, habes
$aa-ba+ba-bb+2bb-\frac{2b^3}{a}+\frac{2b^3}{a}-\frac{2b^4}{aa}+\frac{2b^4}{aa}$ &c.
ubi, retractis iis, qui se elidunt, remanet $aa+bb$. Similiter
$\frac{a^3+b^3}{a-b} = aa+ab+bb+\frac{2b^3}{a}+\frac{2b^4}{aa}+\frac{2b^5}{a^3}$ &c.
hos enim multiplicando per $a-b$ fiet
$a^3-baa+baa-abb+abb-b^3+2b^3-\frac{2b^4}{a}+\frac{2b^4}{a}$ &c.
ubi, remotis contradictoriè oppositis, habetur $a^3+b^3$ &c.
Idem ferè contingit, ubi potestatum paris gradus summa, vel imparis gradus differentia dividitur per summam radicum; nisi quòd signa tunc sunt alternanda; ut

$$\frac{aa+bb}{a+b} = a-b+\frac{2bb}{a}-\frac{2b^3}{aa}+\frac{2b^4}{a^3} \text{ \&c. in infinitum.}$$

$$\frac{a^3-b^3}{a+b} = aa-ab+bb-\frac{2b^3}{a}+\frac{2b^4}{aa}-\frac{2b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^4+b^4}{a+b} = a^3-aab+abb-b^4+\frac{2b^4}{a}-\frac{2b^5}{aa} \text{ \&c.}$$

Sic etiam

$$\frac{aa}{a\pm b} = a\mp b+\frac{bb}{a}\mp\frac{b^3}{aa}+\frac{b^4}{a^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^3}{a\pm b} = aa\mp ab+bb\mp\frac{b^3}{a}+\frac{b^4}{aa}\mp\frac{b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

Non

Non dissimili ratiocinio demonstrare soleo extractionem radicis Neutoniano modo per series infinitas. Puta ℞ $aa + xx$ (quæ est expressio generalis ordinatarum ad rectum hyperbolæ latus, existente $a$ semitransverso, & $x$ distantia à centro) vel ℞ $aa - xx$ (quæ exprimit ordinatam quadrantis circuli, cujus radius $a$, distantia ordinatæ à centro $x$) sic enim series ordinari solet

$$a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{3x^6}{48a^5} - \frac{15x^8}{384a^7} \pm \frac{105x^{10}}{3840a^9} \ \&c.$$

ubi signum $\pm$ valet $+$ in hyperbola, $-$ in circulo, numeri autem, qui post tertium terminum afficiunt numeratores, sunt per ordinem 3. 3x5. 3x5x7. &c. qui verò afficiunt denominatores, incipiendo à secundo termino, sunt 2. 2x4. 2x4x6. 2x4x6x8. &c. orti scilicet, illi quidem ex mutua multiplicatione omnium imparium, hi verò ex multiplicatione mutua omnium parium numerorum per ordinem dispositorum.

Demonstratur, inquam, id ita esse, quia si illa series ducatur in se ipsam, singulis ejus terminis in singulos multiplicatis, orietur nil aliud, quàm $aa \pm xx$, adeòque est legitima radix ejusdem: nam ducatur illa series

in $a$ fiet $aa \pm \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{8aa} \pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

in $\pm \frac{xx}{2a}$ fiet $\pm \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{4aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

in $- \frac{x^4}{8a^3}$ fiet $- \frac{x^4}{8aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

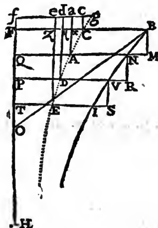
in $\pm \frac{3x^6}{48a^5}$ fiet $\pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

&c.

Summa erit $aa \pm xx$ o o &c.

6 Ad

6 Ad propositum nostrum redeuntes, doctrinam *num.* 3. adductam, alteri Theorematis decimi demonstrationi sic applicabimus: esto Logistica B V I, tangens ad B ipsa B O, subtangens O F, cujus particula infinitè parva F Q accepta,



circumscribantur æqualis latitudinis parallelogramma F M, Q R, P S, &c. Spatium Logisticæ ita stringentia, ut solidum ab ipsa circa F B rotata productum ferè coincidat cum aggregato solidorum à talibus parallelogrammis in eadem rotatione descriptorum, quorum primus cylindrus ex F M, secundus; tertius, & alii deinceps totidem cylindrici tubi ex parallelogrammis Q R, P S, &c. à quibus certè deficere potest illud rotundum Logisticæ solidum minori defectu quolibet dato, & ratio, quam de illorum aggregato ad conum ex F O B comparato concludemus, eadem de ipsomet Logisticæ solido demonstrata esse intelligetur. Subtangens igitur F O vocetur *a*, & F Q infinitè parva *d*; O Q autem pro unitate 1 designetur, ipsa F B per *b* denominata; cùm sit igitur (ob indefinitam ipsius F Q parvitatem, & punctum N curvæ cum tangente O B coincidens) F O ad O Q, scilicet *a* ad 1, ut

B F

BF seu $b$ ad QN, hæc exprimenda erit per $\frac{b}{a}$; & reliquæ lineæ PV, TI, &c. in quibus eadem proportio (ex curvæ natura) continuatur, eò quòd paribus intervallis sint dissitæ, erunt per ordinem $\frac{b}{aa}, \frac{b}{a^3}, \frac{b}{a^4}$, &c. in infinitum; altitudines igitur prædictorum solidorum conflabunt hanc geometricam seriem $b, \frac{b}{a}, \frac{b}{aa}, \frac{b}{a^3}, \frac{b}{a^4}$, &c. bases autem eorumdem in ratione quadrati primi radii FQ, & mox differentiæ quadrati FP ab FQ, & quadrati FT ab FP, &c. nempe, ut $dd$, $3dd$, $5dd$, $7dd$, eò quòd differentiæ quadratorum à lateribus arithmeticè proportionalibus sint, ut impares numeri; hac igitur serie per illam multiplicata prodibit series ipsorũ per ordinem solidorum $ddb, \frac{3ddb}{a}, \frac{5ddb}{aa}, \frac{7dbb}{a^3}$, &c. quam quidem resolvere potes in has numero infinitas, prefixis majusculis litteris subnotatas,

| | |
|---|---|
| A | $ddb + \frac{ddb}{a} + \frac{ddb}{aa} + \frac{ddb}{a^3} + \frac{ddb}{a^4}$, &c. |
| B | $\frac{2ddb}{a} + \frac{2ddb}{aa} + \frac{2ddb}{a^3} + \frac{2dbb}{a^4}$, &c. |
| C | $\frac{2ddb}{aa} + \frac{2ddb}{a^3} + \frac{2dbb}{a^4}$, &c. |
| D | $\frac{2ddb}{a^3} + \frac{2ddb}{a^4}$, &c. |
| E | $\frac{2ddb}{a^4}$, &c. |

quarũ summa $ddb + \frac{3ddb}{a} + \frac{5ddb}{aa} + \frac{7ddb}{a^3} + \frac{9ddb}{a^4}$, &c. eadẽ, ut constat, quæ priùs.

7 Sunt verò præscriptæ series terminorum proportionalium, quorum exponens commune $a$; si igitur maximi earū termini ducantur in $a$, & productū dividatur per $a - 1$ (quod hìc juxta constructionem est quantitas $d$ infinitè parva) habebuntur termini iis infinitis seriebus æquales: putà series A æquatur $dba$; series B æquatur $2\,db$; series C æquatur $\frac{2\,db}{a}$ series D æquatur $\frac{2\,db}{aa}$, & sic deinceps; series igitur illorum solidorum æquabitur progressionibus duabus

$$dba + db + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a^3}, \text{ \&c.}$$

$$db + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a^3}, \text{ \&c.}$$

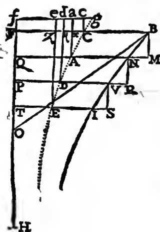
quippe harum summa terminis nuper collectis æquatur

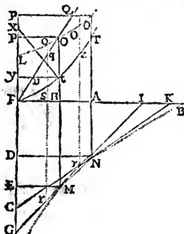
$$dba + 2\,db + \frac{2\,db}{a} + \frac{2\,db}{aa} + \frac{2\,db}{a^3}, \text{ \&c.}$$

prima autem harum serierum (facta eadem multiplicatione) æqualis est $baa$; secunda verò æqualis $ba$ (sive, ut æquè multæ utrobique appareant dimensiones, addita hinc unitate, dicas $ba1$) est verò unitas QO, *fig.* 1. *seq.*, ferè = OF, idest $a$, quippe à qua deficit differentia FQ infinitè parva, igitur pro $ba1$ accipi poterit iterum $baa$; atque adeò series dictorum solidorum, seu ipsum rotundum solidum Logisticæ, de quo loquimur in hoc Theoremate, optimè exprimetur per $2\,baa$; Conus autem ex triangulo BOF, utpotè æqualis trienti cylindri circumscripti [pro circulo accepto radii quadrato, ut in solidorum serie factum est, quod in idem recidit, ob proportionalitatem servatam] exprimendus erit per $\frac{1}{3}baa$; solidum igitur Logisticæ ad inscriptum Conum erit, ut $2\,baa$ ad $\frac{1}{3}\,baa$, sive ut 2 ad $\frac{1}{3}$, vel ut 6 ad 1. Q. e. d.

8 Nisi hic demonstrandi modus plenè satisfecerit, prima ostensione contentus, secundæ saltem conatum lauda, ac mecum progredere ad dimetiendas ejusdem solidi portiones, à partibus videlicet per binas ordinatas resectis, & circa ma-

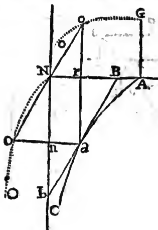
majorem ipsarum revolutis progenitas; idque diversa rursus à præcedentibus methodo: esto, *fig.* 2., Logistica BNM, cujus ad puncta N, M tangentes NC, MG occurrant asymptoto quidem FG in punctis C, G, ordinatæ verò BF in




punctis K, I, & coordinentur ND, NA, ME, MH; dico AK ad HI (subtangentes scilicet in ordinata, non in asymptoto acceptas) esse ad invicē, ut sunt rectangula AND, HME; ratio enim AK ad HI componitur ex AK ad AN [seu DN ad subtangentem DC, vel EG] AN ad MH, & MH ad AI (ideſt subtangentis EG ad EM) ergo & componitur ex DN ad EM, & AN ad MH; ex his autem conflatur ratio rectanguli AND ad HME; itaque constat propositum. Breviùs sic: ob proportionales lineas GE, EM, MH, HI, est rectangulum ex GE, asymptoti subtangente, in HI, subtangentem ordinatæ, æquale inscripto rectangulo EMH; similiter CD in AK æquabitur DNA; ergo, ut rectangula subtāgentium asymptoti in subtangentes ordinatæ (hoc est ipsæ subtangentes in ordinata, cùm quæ in asymptoto sint æquales) ita erunt rectangula Logisticæ inscripta.

9 Concipiamus jam Logiſticam eſſe A a C, cujus ordinata A N, aſymptotos N b, tangens ad quodvis punctum a ipſa a B, conveniens cum ordinata in B; ac mota regula N o per punctum N, ita ut perpetuò parallela exiſtat tangenti,




occurrat verò ordinatæ productæ a n ad puncta o O, perficiatur figura N o O ad communem axem N b poſita, quæ ex dictis *cap.* 8. *num.* 4. & 5. erit ipſi Logiſticæ Correlata, ejuſque ſpatia o N n reſpectivè ſemper æqualia ſpatiis a A r: ſingulæ autem lineæ o n æquales erunt ſubtangentibus r B, in ordinata acceptis; ſed hæ proportionantur rectangulis n a r, inſcriptis Logiſticæ ſpatio, vel etiam ſuperficiebus cylindricis per illorum converſionem circa N A deſcriptis; erunt igitur lineæ ordinatæ in figura O N n, ipſi o n parallelæ, ut concentricæ ſuperficies cylindricæ in ſolido rotundo ex n a A N, circa A N revoluto, productæ à ſingulis ordinatis n a per eadem puncta n tranſeuntibus; igitur omnes lineæ figuræ o n N ad totidem æquales extremæ o n [ ſive ipſa figura o n N, aut trilineum a A r illi æquale ad rectangulum N n o, vel a r B ] erunt, ut omnes cylindricæ ſuperficies in dicto ſolido, ex portione n a N revoluta genito, ad totidem æquales extremæ à linea

nea n a generatæ (ideſt ut ipſummet ſolidum rotundum ad ſolidum, quod gineretur ab hyperbola per a aſymptotis n N A inſcripta, & circa N A revoluta, quippe in illo omnes cylindricæ ſuperficies concentricæ æquales forent ei, quæ ab n a deſcribitur, propter ſingula inſcripta parallelogramma ipſi n a r æqualia) & ſumendo conſequentium ſemiſſes, erit trilineum a r A ad inſcriptum triangulum a r B, ut ſolidum rotundum ex n a A N circa A N, ad inſcriptum cylindrum ex parallelogrammo n a r N revoluto productum.

10 Nota autem eſt ratio trilinei ad inſcriptum triangulum, quippe aſſumpta figura *cap.* 7. *num.* 2. adhibita, conſtat, trilineum B K A æquari rectangulo ſubtangentis O F in Q A, triangulum verò B K Q æquatur rectangulo ex B K in ſemiſſem K Q; propterea ratio trilinei ad triangulum componetur ex O F ad B K (vel D K ad K Q) & ex Q A ad ſemiſſem K Q (vel dupla Q A ad K Q ideſt erit, ut duplum rectangulum ex D K in Q A ad quadratum K Q; nota igitur ſimiliter erit ratio ſolidi rotundi ex ſpatio Logiſticæ duabus ordinatis intercepto, & circa majorem revoluto

ad

ad cylindrum inſcriptum, ab inſcripto ſcilicet parallelogrammo in eadem converſione progenitum, eadem ſemper, quæ præfati rectanguli ad dictum quadratum. Tubos verò, ſeu annulos ex ejuſmodi ſpatiis circa ordinatam à majori remotiorem revolutis, putà ex GHBF circa AD rôtato, progenitos, eadem aſſumpta ſuperioris numeri figura, eodemque argumento facilè ad menſuram vocabis, ſimilia veſtigia premendo.

# CAPUT XI.

*Propositio, & demonstratio Undecimi Theorematis circa distantiam centri gravitatis Logisticæ ab ordinata. Solida infinitorum Logisticæ spatiorum circa ordinatas sunt, ut eædem ordinatæ. Centrum gravitatis quomodo distet ab alterutra ordinatarum in spatiis determinatis Logisticæ. Solida ex his spatiis circa quamvis ordinatam revolutis. Datum solidum in data ratione dividere, &c. Propositio, ac prima demonstratio Theorematis XII. circa distantiam centri gravitatis Logisticæ ab axe. In Correlatis figuris distantia centri gravitatis interioris subdupla est similis distantiæ exterioris. Talis distantia in figura Correlata quadrantis circuli est sesquitertia basis quadraticis. Centrum gravitatis trilinei Cycloidis distat à verticis tangente per semissem radii. Distantia centri gravitatis semicycloidis, & ejus trilinei à basi, & vertice; necnon solida ab iis descripta. Cissoidalis spatii centrum gravitatis, in qua ab asymptoto distantia; ejus solida, atque hinc ratio fusi cycloidalis ad cylindrum. Figuræ, quæ Logisticæ ad axem correlata est, distantia centri gravitatis ab ordinata. Similis distantia in harum, & generaliter omnium Correlatarum figurarum complexo. Secunda demonstratio Duodecimi Theorematis, & extensio ad inventionem centri, in quibusvis Logisticæ portionibus, ad solida, ex iis circa quamvis lineam rotandis determinanda, utilem.*

Jam

IAm ad centra gravitatis, tum ſpatii ſuperficialis Logiſticæ, tum ſolidorum ipſius determinanda procedit Hugenius; ait enim Theoremate Undecimo: *Ex hac ſolidorum menſura ſequitur, quòd centrum gravitatis infiniti ſpatii poſt unam ordinatarum diſtat ab hac ordinata longitudine ſubtangentis;* quod ſic breviter demonſtratur: rotunda ſolida rationem habent compoſitam ex rationibus figurarum genitricum, & diſtantiarum centri gravitatis earumdem ab axe motus, ex pervulgata jam regula Guldini, cui neſcio an præluſerit Pappus ad finem ſuæ præfationis in *lib.7, mathem. collect.* Solidum igitur ex Logiſtica B C A circa B F ad conum ex inſcripto triãgulo O B F

circa eamdem revoluto eſt in compoſita ratione ex ſpatio Logiſticæ F B C A ad triangulum O B F (quæ per Theorema 7. *cap.* 8. demonſtratum eſt ratio dupla) & ex diſtantia centri gravitatis ſpatii Logiſtici ab ipſa F B ad diſtantiam centri gravitatis trianguli, quæ, ut notum eſt, æquaretur trienti ipſius O F; ſed hæc eadem ſolida ex dictis *cap. præced.* ſunt ad invicem in ratione ſextupla, ideſt in compoſita ex dupla, & tripla; oportet ergo diſtantiam centri gravitatis ſpatii Logiſtici ab ipſa F B eſſe triplam diſtantiæ centri gravitatis trianguli ab

ab eadem F B; ergo oportet talem diſtantiam eſſe ipſammet ſubtangentem O F, cujus triens diſtantiam centri gravitatis trianguli, ut diximus, determinat. Patet ergo propoſitum.

2 Hinc habetur, cujuſvis infiniti ſpatii Logiſticæ B A V Q, vel C V F Q, diſtantiam centri gravitatis ab extrema ordinata eamdem ſemper eſſe, quippe æqualem communi ſubtangenti: unde efficitur, ſolida ex primo ſpatio circa B A, & ex

ſecundo circa C V, eſſe ad invicem, ut ipſamet ſpatia, ex quibus gignuntur, ob æqualem utrinque centri gravitatis diſtantiam, ſeu eſſe ad invicem, ut ipſæ ordinatæ B A, C V talibus ſpatiis proportionales, ex dictis *cap.* 3. *num.* 7. id quod vel exinde patet, quòd talium ſolidorum ſubſexcupla, nempe coni ab inſcriptis triangulis A O B, C V Q, ob circulos æqualium radiorum B O, C Q ſunt, ut altitudines B A, C V, circa quas convertuntur.

3 Hinc etiam patet, determinato quovis ſpatio B A V C duabus ordinatis interjecto, aſſignari poſſe diſtantiam ejus centri gravitatis ab alterutra ordinatarum. Ducatur enim tangens A O, itaque in O eſt centrum æquilibrii totius ſpa-

tii B A V Q compoſiti ex propoſito B A V C, & ex reliquo C V F Q; ſed reliqui C V F Q habetur centrum gravitatis, ducta tangente Q V, in ordinata ex puncto Q, diſtans videlicet ab æquilibrii centro O per Q O æqualem altitudini

C B propoſiti ſpatii (ut patet, æqualibus ſubtangentibus C Q, B O, communem ſubtrahendo, vel addendo quantitatem C O) ſi igitur fiat, ut ſpatium B A V C ad reliquum C V F Q, nempe ex Theoremate Tertio, quod *cap.* 4. *num.* 5. & *cap.* 3. *nu.* 8. demonſtravimus, ut differentia ordinatarum A B, C V ad ipſam C V, ita Q O, vel B C, ad O E, erit in E D centrum gravitatis propoſiti ſpatii C V A B, diſtans ab A B per E B, & à C V per E C; conſtat ergo propoſitum.

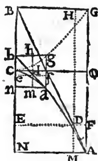
4 Dabuntur itaque ſolida ex quavis Logiſticæ portione A V C B, nedum converſa circa majorem ordinatarum B A, ſed & circa minorem C V, quippe ad invicem in ratione E B ad E C; & annuli ex variis ſpatiis E D V C, & C V F G, circa eamdem, vel diverſas ordinatas revolutis, notam dimenſionem, & proportionem habebunt, quippe in compoſita eorumdem ſpatiorum, diſtantiarumq; ab axe ſui motus ratione;

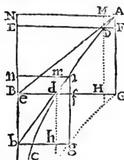
Qui-

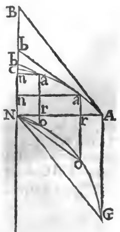
Quibus facilè erit, dato solido ex dato spatio circa axem datũ revoluto, aliud ex alio item spatio dato circa aliam quamdam ordinatam majorem, minoremve revolvendo producendum reperire, priori solido, vel æquale, vel in data ad ipsum ratione; item quodvis ex talibus solidis per concentricas superficies in data ratione dividere, &c.

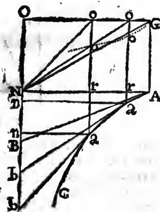
5 Jam ad Duodecimum Theorema Hugenii gradum faciamus, in quo asserit: *Idem centrum gravitatis distare ab asymptoto per quadrantem ordinatæ*; Similiter enim ratio solidi ex B C A Logistica circa axem F O, ad conum ex triangulo O B F circa eumdem axem, cùm sit ex Theoremate, & *cap.* 9. ratio sesquialtera, componetur utique ex dupla, & subsesquitertia, ut patet in numeris 6, 3, 4; componitur autem & ex ratione spatii F B C A ad triangulum F B O (quæ est ratio dupla) unà cum ratione distantiæ centri gravitatis spatii F B C A ad distantiam similis centri trianguli F B O ab eodẽ axe motus F O; oportet igitur, quòd distantia centri gravitatis spatii Logisticæ ab axe sit subsesquitertia distantiæ centri gravitatis trianguli, nempè subsesquitertia trientis ipsius F B, adeòque quòd sit æqualis quadranti ipsius F B, ut in hoc Theorem. proponitur, sic enim erit ad distantiam centri gravitatis trianguli, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{3}$ idest prorsus, ut 3 ad 4. Q. e. d.

6 Eadem veritas, ut ſecundò demonſtretur, imò & ad diſtantiam centri gravitatis partium Logiſticæ extendatur, uberrimum illum fontem Correlatarum figurarum, unde bis jam hauſimus, in *cap.* ſcilicet 8. & 9. tertiò iterum repetam, neque enim venam idcircò exhauriendam putes, Mi Lector.



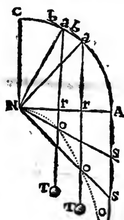




Audi igitur. In Correlatis quibuſcumq; figuris C A N, & g G A a C, aut C A N, G o o N, diſtantia gravitatis centri primæ figuræ interioris C A N ab axe N B, ſemper ſubdupla eſt diſtantiæ ſimilis centri alterius figuræ g G A a C, vel

A G

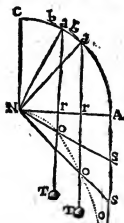
AGooN ab eodem axe; cùm enim æquales ſint hæ figuræ, utì *cap.* 8. demonſtratum eſt, ſolidum tamen, quod ex prima fit ex *cap.* 9. ſubduplum ſolidi ex ſecunda circa axem NB revoluta, patet, hæc ſolida eſſe ad invicem, ut ſunt diſtantiæ centrorum gravitatis ab axe motus, adeòq; diſtantiam primæ eſſe ſubduplam diſtantiæ alterius; & data diſtantia centri gravitatis alterutrius ex Correlatis figuris, diſtantia reliquæ non ignorabitur.

7 Colliges jam, diſtantiam centri gravitatis figuræ ANoo, quadranti circulari Correlatæ, ab axe CN, eſſe ſeſquitertiam



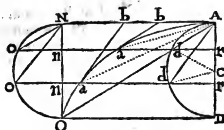

baſis Quadratricis, eidem quadranti per C adſcriptæ; cùm enim debeat dupla eſſe diſtantiæ centri gravitatis quadrantis CAN, quæ æquatur $\frac{2}{3}$ baſeos dictæ Quadratricis, eò quòd ratio cōpoſita ex diſtantia centri gravitatis quadrantis ad ſemiſſem radii (diſtantiam centri gravitatis quadrantis circumſcripti) & ex ſemiſſe radii ad baſim Quadratricis, ſive ex ſemiſſe arcus CA ad radium, aut ipſius quadrantis CAN ad radii quadratum, debet eſſe ratio ſeſquialtera, eadem nempè, quæ hæmiſpherii ex quadrante ad cylindrum ex radii quadrato (juxta Archimedis doctrinas breviùs à nobis demonſtratas in Vivianeis ad

*Prop.*




*Prop.* 37. *Coroll.* 6.) quæ, ex Centro-barica, præſcriptis rationibus componitur. Nota proinde fiet diſtantia centri gravitatis ejuſdem figuræ A N o o ab A S, & notum ſolidum ex ipſa circa A S deſcriptum, utì & ex eadem circa C N.

8 In trilineo Cycloidis A a O N patebit, centrum gravitatis diſtare à tangente verticis A N per ſemiſſem radii, figura




quippe huic Correlata eſt, ex *cap.* 8. *num.* 7. ſemicirculus N o o, cujus centri gravitatis diſtantia eſt utique radius integer: conſequenter diſtabit idem gravitatis centrum in trilineo Cycloidis ab ejus baſi O D per $\frac{3}{4}$ diametri O N; & ſolidum ex tali tri-

trilineo circa OD, triplum erit solidi ex ejusdem conversione circa NA, vel æquale erit solido ex aggregato semicirculi, & præfati trilinei, videlicet spatii ANoOaA ( aut ANO+AdD ) circa NA; cùmque cylindrus ex parallelogrammo ONAD, sive circa OD, sive circa NA, pariter idem sit; residuum, nempe factum ex DAaO semicycloide circa OD, æquabitur facto ex trilineo OaAddD circa NA, atque, ut ipsa semicyclois ad dictum trilineum, ita reciprocè erit distantia centri gravitatis ejusdem trilinei ab NA, ad distantiam centri gravitatis semicycloidis à basi OD, videlicet in ratione sesquialtera, illa autem æquatur $\frac{5}{8}$ diametri AD ( ut mox ostendam ) ergo hæc æquatur $\frac{5}{12}$ ejusdem suæ diametri.

9 Quod nuper assumpsi sic ostendetur: notum est, duas simul lineas in trilineo Cycloidali OaAdD à centro æquè remotas, ad, ad, æquales esse basi OD, seu interceptæ od inter peripherias semicirculorum AdD, NoO; ipsa igitur oa, accepta in trilineo AaOoN versùs basim, æqualis semper erit lineæ ad, sumptæ versùs verticem A in altero trilineo AaODdA; itaque ipsum trilineum AaOoN haberi poterit pro eodem OaAdD inversè posito, & tanta erit centri gravitatis distantia in hoc ab ipsa AN, quanta in illo similis centri distantia ab OD. Jam sic: solidum ex solo AaOnN circa OD triplum est ( ex supra ostensis ) solidi ex eodem spatio circa NA; & annulus ex semicirculo NOo circa OD (nam perinde est, ac circa AN) est ejusdem duplus; itaque solidum ex utriusque complexo AaOoN circa OD quintuplus est solius solidi ex OaANn circa NA, additoque & hinc annulo ex semicirculo eodem circa NA, cujus quantitas ejusdem solidi est dupla, habebitur, quòd solidum ex integro spatio AaOoN circa OD, ad solidum ex eodem circa NA est, ut 5 ad 3, distantia igitur centri gravitatis talis spatii ab OD, ad distantiam ejusdem ab AN est, ut 5 ad 3; ideòque prima distantia æquatur 5. octantibus diametri NO, vel AD, indeq, ( ex præmissis ) distantia centri gravitatis trilinei OaAdD ab AN eadem erit, quam supra determinavimus.

10 Cùm igitur & ſpatium Ciſſoidale, juxta dicta *cap.* 8. *num.* 9. figura ſit Cycloidi Correlata, erit diſtantia centri gravitatis ſpatii Ciſſoidalis A N o o infinitè longi, à C N, dupla diſtantiæ ſimilis centri cycloidis A a C N ab eadem baſi



C N; cùmque hæc æqualis ſit $\frac{5}{12}$ diametri, juxta dicta *num*.8. illa æqualis erit $\frac{10}{12}$, ſeu $\frac{5}{6}$ ejuſdem diametri, ac conſequenter diſtabit idem gravitatis centrum ab aſymptoto A O per ſextantem diametri N A; eritque ſolidum ex Ciſſoide A N o o circa A O revoluta, æquale quintæ parti ſolidi ex eodem ſpatio circa C N converſo, aut $\frac{2}{5}$ ſolidi ex Cycloide A C N circa baſim C N (quippe hoc ſolidi ex Ciſſoide circa eumdem axem ſubduplum eſt, utì jam oſtendimus *cap*. 9. *nu*.12.) eſt verò, ut ibidem monuimus, ſolidum ex Ciſſoide circa A O, æquale annulo ſtricto ex ſemicirculo genitore, ſolidum igitur ex ſemicirculo genitore Cycloidis circa tangentem verticis, vel baſim cycloidis revoluto, æquatur $\frac{2}{5}$ fuſi Cycloidalis ex cycloide circa baſim rotata, qui propter eà fuſus æquabitur 5. octantibus circumſcripti cylindri ex parallelogrammo D O N A ſemicirculi quadruplo, indeque producente cylindrum quadruplum dicti annuli.

11 De infinitarum parabolarum, atque hyperbolarum, deque Tractoriæ centro non est quod addam, Tute ipse exerce, mi Lector; ego obiter adnoto, in figura N o O ad eumdem axem N b Logisticæ Correlata, ejus gravitatis centrum



ab N A distare per duplum subtangentis Logisticæ, quandoquidem centrum Logistici, spatii, ex superiori Undecimo Theoremate, distat ab ordinata A N per simplicem longitudinem subtangentis; complexi verò ex figuris Correlatis, scilicet spatii C a A N o O centrum gravitatis distat ab A N per sesquialteram longitudinem subtangentis; imò generaliter semper in figuris Correlatis, quarum partium distantia interioris, ( scilicet ad quam pertinet tangens a B ) est 2, earum distantia complexi ex utroque spatio est 3, distantia verò exterioris ( scilicet ad quam ordinantur ipsæ o n æquales subtangentibus alterius ) est 4; utì est evidens ex dimensione solidorum ab ijs factorum : unde expeditiùs demonstrabis quæ *num.* 9. dicta sunt.

Data autem opera, tum hìc, tum *cap. præceden.* omisimus demonstrationem centri gravitatis in figuris ad modum Spi-

ralium descriptis, ut in ijs exercere se posset Lectorum industria, comparando videlicet triangula illa, ex quibus constant, cum parallelogrammis figurarum Correlatarum, ut supra fecimus *cap.* 8. *num.* 12.

12 In Logistica igitur A a a C, cujus Correlata figura ad ordinatam N A est parallelogrammum A G O N, ut ostendimus *d. cap.* 8. *num.* 13. cùm distantia centri gravitatis ipsius

O G A N dupla esse debeat distantiæ similis centri Logisticæ N A a C ab eodem axe N B; sit autem distantia illa in parallelogrammo æqualis semissi ipsius N A, patet, distantiam ejusmodi in spatio Logistico fore $\frac{1}{4}$ ejusdem N A, uti in hoc Duodecimo Theoremate ab Hugenio propositum fuit; sed & constat methodus comparandi distantias centri gravitatis variarum insuper Logisticæ partium ab eodem axe; accepto quippe spatio quolibet n a a n, ordinatisque a r o, a r o, patet, rectangulum o r r o esse figuram Correlatam ipsi a n n a; datur autem distantia centri gravitatis parallelogrammi ejusdem ab N O, scilicet media arithmetica inter r N, r N distan-

ſtantias laterum ab NO, itaque & ejus ſubdupla dabitur, ſcilicet diſtantia centri gravitatis figuræ naan ab eodem axe, perpetuò æqualis ſemiſſi mediæ arithmeticæ inter extremas ordinatas. Id quod ſuo modo obſervatur & in toto Logiſticæ ſpatio, extremæ ſiquidem ordinatarum ſunt AN, & punctum; media inter hæc arithmetica ſemiſſis NA; hujus dimidio, nempe $\frac{1}{4}$ NA æqualis prorſus eſt diſtantia centri gravitatis integri ſpatii Logiſticæ. Dabitur ergo in quovis hujuſmodi ſpatio, ſive integro, ſive duabus ordinatis intercepto, punctum ipſum, quod gravitatis ejus centrum determinat, adeòq; jam metiri licebit ſolida à Logiſticæ ſpatiis circa quamlibet lineam revolutis, ex dimenſione tum ipſius Logiſticæ, tum diſtantiæ ejus centri gravitatis à propoſita linea.



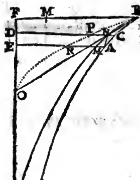
# CAPUT XII.

*Theorema Decimumtertium demonstratur. Eadem semper centri gravitatis in quibusvis infinitè longis Logisticæ solidis distantia; quomodo in ejusdem solidi portionibus indaganda. Prima demonstratio Decimiquarti Theorematis; ad majorem rigorem quomodo exigenda. Solidorum ab eadem figura circa basim, & axim rotata distantiæ centri gravitatis sunt, ut distantiæ ab axi, & basi genitricis figuræ. Altera ejusdem Theorematis demonstratio. Variarum Conoideon centra hinc determinanda; in portionibus solidi rotundi, aut cylindricis Logisticæ truncis, aut figura Logisticæ Correlata, centra gravitatis dantur. Libræ infinitæ, geometricè decrescentibus, & æquè distantibus ponderibus gravatæ, aut finitæ quidem, sed per intervalla continuè proportionalia arithmeticè in infinitum crescentibus quantitatibus oneratæ, centra æquilibrii determinari possunt. Secunda demonstratio à scrupulo vindicata. Cautio in his adhibenda; aliorum lapsus notati, ut devitentur. Curvis superficiebus solidorum generalis demonstratio applicatur. Logistica curva centro gravitatis caret; circa axem rotata superficiem infinitè longam, finitæ dimensionis producit: in qua ad determinatam hyperbolam ratione; hæc hyperbola, cujus parabolicæ lineæ in semitransversum ductæ rectangulo æqualis; curva illa superficies, cujus circumferentiæ, & periphe-*

*riæ*

*riæ parabolicæ rectangulo æqualis ; ut ejus portiones correspondeant ejusdem parabolæ partibus. Tractoriæ solidum finita superficie gaudet, ejus curva centro pariter caret.*

1 POst centra gravitatis spatiorum Logisticæ, progreditur Hugenius ad gravitatis centra in ejus solidis determinanda : *Reperimus*, inquit Theorem. XII. *quòd centrum gravitatis primi ex dictis solidis infinitis distat à sua basi per semissem subtangentis*. Primum quippe illud solidum ex Logistica FBCA circa axem FO revoluta, resolutum in circulos basi parallelos, proportionaliter analogum est alteri




Logisticæ BNM, ordinatarum in duplicata priorum ratione decrescentium, qualem supra descripsimus *cap* 9. *nu*.4. eadem igitur erit distantia centri gravitatis præfati solidi à circulo suæ basis, quæ distantia centri gravitatis Logisticæ BNM à sua extrema ordinata FB; sed hæc distantia æquatur subtangenti ejusdem Logisticæ BNM, per Undecimum Theorema Hugenii superiori capite demonstratum, & hæc eadem subtangens ostensa est *cap*. 9. *num*. 5. æqualis semissi subtangentis FO, pertinentis ad priorem Logisticam BCA; itaque & il-

illius solidi rotundi centrum gravitatis distabit ab extremo circulo suæ basis per semissem subtangentis, seu Parametri. Quod erat demonstrandum.

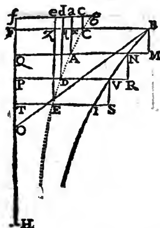
2 Eadem itaque semper erit distantia centri gravitatis à sua basi infinitorum quorumvis solidorum ab eadem Logistica per varias ordinatas resecta factorum, semper scilicet æqualis dimidiæ subtangenti ejusdem Logisticæ; Quocirca portionum etiam cujusvis ex dictis solidis centra gravitatis assignari poterunt: proponatur enim verbigratia quod fit ex

portione B A V C circa B C revoluta; ita procedemus, simili methodo, ac superiori capite *num.* 3. esto B O semissis subtangentis, & consequenter O centrum gravitatis totius facti ab infinito spatio B A V Q. Similiter & C Q semissis subtangentis ejusdem, ut punctum Q sit centrum gravitatis solidi, quod ex C V F Q; distat igitur hoc centrum à puncto O, per Q O æqualem altitudini solidi propositi B C, propter communem additam, vel detractam C O; fiat igitur, ut solidum ex A B C V ad infinitum ex C V F Q, nempe, ut colligitur ex dictis *cap.* 9. *num.* 3. & 10. ut differentia qua-

dra-

dentorum A B, & C V ad quadratum C V, ita Q O, vel B C ad aliã C E, erit E centrum gravitatis ſolidi ex ſpatio B A V C circa B C revoluto geniti; quamquàm expeditiùs forte idem obtinere licebit per inventionem diſtantiæ centri gravitatis ab ordinatis in congruo ſpatio Logiſticæ, in duplicata ordinatarum ratione decreſcentis, proportionaliter analogo ad dictũ rotundum ſolidum, utì numero præcedenti indicavimus.

3 Difficilior mihi viſa fuit, neque ipſa nonniſi ægrè ſucceſſit (cur enim fateri erubeſcam, qui & in magis obviis moram pati aliquando ſoleo?) Theorematis Decimiquarti demonſtratio, ubi Vir Clariſſimus pronunciat, quòd *centrum etiam gravitatis alterius ſolidi diſtat ab ejus infinita baſi per octantem ſui axis*. Hoc ut demonſtrem, figuram reſumo, eumdemque calculandi modum, quo *cap.* 10. *num.* 6. uſus ſum:




ex parallelogrammis itaque F M, Q R, P S Logiſticæ circumſcriptis, intelligatur confici in converſione omnium circa F B, ſeries ſolidorum, quæ pro minori, ac minori latitudine ſingulorum, magis, magiſque accedet ad rotundum Logiſticæ ſolidum, de quo in hoc Theoremate ſermo eſt; itaque ubi F Q infinitè parva ſupponatur, tunc cylindrus ab F M de-

descriptus, & tubi cylindrici ex reliquis QR, PS, &c. prorsus coincident cum tali Logisticæ solido, quodque de iis demonstrabimus, de hoc perinde obtinebit; porrò ostendimus loco citato (retentis iisdem symbolis) cylindrum F M esse *ddb*, & tubos huic consequentes per ordinē esse $\frac{3ddb}{a}$, $\frac{5ddb}{aa}$, &c.

ut supra ad finem *pag.* 129. seu (propter infinitè exiguum excessum ipsius *a*, seu F O supra assumptam unitatem Q O, qui excessus penitus evanescit, ubi solidorum series in ipsum Logisticæ solidum deficit) accepta loco ipsius *a*, unitate, quæ ad quemlibet gradum elevata non crescit, nec terminos dividens illos immutat, erit prædicta solidorum series æqualis $ddb + 3ddb + 5ddb + 7ddb$, &c. suspenditur autem in libra F B primus terminus ad punctum C, medium ipsius F B, & secundus terminus ad punctum x, ubi cadit axi parallela, ducta ex medio puncto A lineæ Q N; & tertius terminus ad y punctum, quod determinat parallela y D bifariam secans ipsam P V; similiter & quartus terminus pendet ex z per lineam zE bisecantem ipsam T I; sunt enim puncta C, x, y, z, &c. centra gravitatis per ordinem talium solidorum;

per

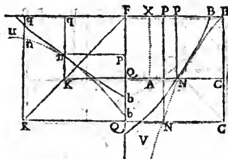
per puncta verò C, A, D, E, & alia similiter bifariam secantia singulas Logisticæ ordinatas, transit utique linea pariter Logistica EDACg. Producta igitur OF in f, ut Ff æquetur semissi ipsius FQ (adeòque à fortiori sit infinitè parva quantitas, ac penitus evanescens) ad parallelam ordinatam fg producantur axi æquidistantes Ez, Dy, Ax, in e, d, a, c; poterit similiter fg sumi pro libra, ex qua pendeat primum solidum per lineam Cc, secundum per lineam Aa, tertium per Dd, quartum per Ee, &c. & quidem quarum partium Ff, seu Cc ponitur 1. talium Aa est 3. Dd 5. Ee 7. &c., juxta progressionem arithmeticam numerorum imparium, secundùm quam ipsa solida ex iis pendentia procedunt; perinde igitur onerabitur linea fg, vel FC à talibus solidis ex ea pendentibus, ac oneretur fg à lineis Logisticæ gCADE; sed ab his ordinata fg sic oneratur, ut centrum æquilibrii habeat distans ab axe FO per quadrantem ipsius fg, vel FC illi proximè æqualis (talis quippe ex Theoremate Duodecimo est distantia centri gravitatis Logistici spatii, quod tales lineæ implent) ergo & centrum æquilibrii, aut gravitatis omnium illorum solidorum, seu integri solidi ex Logistica circa ordinatam revoluta, distat similiter ab axe per quadrantem ipsius FC, seu octantem integræ FB ordinatæ; quod est propositum.

4 Si quis autem majorem in præsenti demonstratione rigorem desideraverit, is poterit apagogico circuitu sibi penitus satisfacere, sumptis, loco linearum Cc, Aa, Dd, Ee, parallelogrammulis Ccg, Aac, Dda, Eed, &c. quæ penitus proportionalia deprehendet dictis solidis, siquidem eorum altitudines BF, QN, PV, &c. proportionantur earumdem semissibus, & talium semissium differentiis gC, Ca, ad, de, &c. bases verò talium solidorum sunt, ut differentiæ quadratorum ex lineis FQ, FP, FT, &c. arithmeticè crescentium, scilicet ut impares numeri, vel ut lineæ Cc, Aa, Dd, Ee, &c. Unde cùm accepta fuerint tot solida, quæ integrum Logisticæ solidum impleant, & totidem parallelogramma, quæ Logisticum illud spatium adæquent, constabit, in eodem puncto, tum Logistici illius spatii centrum

æquilibrij, tum solidi illius centrum gravitatis reperiri, adeòque ad quartam ipsius F C, vel octavam totius F B partem ab axe acceptam. Quod, &c.

5 Sed absit, ut hìc ego subsistam; tamdiu mihimet ungues corrodam, quò usque clariorem, (& verò generalissimam) rei hujus demonstrationem detur extundere; mihi certè videtur universalius quidpiam hinc relucere, quam ut peculiaribus Logisticæ proprietatibus adstringi mereatur. Jam jam assequor: an non hoc illud est, quòd in qualibet figura F B V, cujus basis F B, axis F Q, *fig seq.* quam rationem habet distantia centri gravitatis figuræ planæ ab axe, ad similem distantiā à basi, eamdem & proportionem habent ad invicem distantiæ centri gravitatis (uniuscujusque à sua basi) solidorum ex eadem circa basim, & circa axim revoluta progenitorum? Intelligatur enim tota figura circa punctum F in suo plano verticali converti, quousque axis F Q horizontaliter, situetur in F q, in directum positus priori basi F B, quæ jam perpendiculariter pendeat in F b; sumptaque axis portione F Q æquali ipsi F q, ordinentur Q N, q n, quæ erunt æquales; imò eædem; & in solido quidem ex figura circa F B revolu-

luta, cogitetur per punctum Q transire cylindrica superficies à linea QN descripta in sui rotatione circa FB, cujus quidem rectangulum per axem duplum erit, ut constat, inscripti rectanguli FQNP; in solido autem ex eadem Figura




circa axem Fq revoluta, concipiamus per punctum q transire circulum radio qn descriptum, & bisecta in A ipsa QN, ducatur AX ipsi FQ parallela; pendebit igitur in priori solido cylindrica superficies à linea QN descripta ex puncto X, quod est ejus centrum gravitatis; circulus verò radii qn pendebit ex suo centro q; est autem distantia qF ad FX, ut ipsa cylindrica superficies ex QN ad circulum ex qn (est enim cylindrica superficies quælibet ad datum circulũ, ut rectangulum per axem illius, ad quadratum ex radio hujus, per propositionem quintam Torricelli de solid. spher. l. 1. idest in proposito, ut duplum rectangulum PNQ ad quadratum nq, sive ut dupla PN, vel FQ ad ipsam QN, vel ut simplex qF ad FX ipsius QN dimidiam) æquiponderant igitur ex F, tum ille circulus, tum hæc superficies; & hoc semper; quare & utriusque solidi ad libram continuatam BFq appensi æquilibrium habebunt ex puncto F; unde distantia centri gravitatis solidi ex FBNV circa Fq à sua basi transeunte per punctum F, erit ad distantiam centri gravitatis solidi ex figura eadem FBNV circa FB revoluta à sua basi per F transeunte, ut reciprocè hoc secundum soli-

dum est ad illud primum; sed quia utrumque gignitur ab eadem figura, nunc circa basim FB, nunc circa axem Fq, vel FQ revoluta, hæc solida sunt ad invicem, ut distantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à lineis, circa quas fit rotatio,

nempè ut distantia, quam habet centrum gravitatis planæ figuræ FBV à basi FB, ad distantiam ejusdem ab axe QF; distantiæ igitur centri gravitatis solidorum ab eadem figura descriptorum, nunc facta circa axem, nunc circa basim rotatione, sunt ad invicem, ut distantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à base ad ejusdem distantiam ab axe. Quod est propositum.

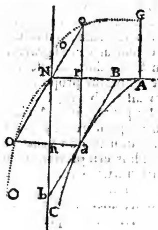
6 Cùm igitur distantia centri gravitatis spatii Logistici à sua basi, ad distantiam ejusdem ab axe sit, per Theoremata Undecimum, & Duodecimum supra demonstrata in capite præcedenti, ut subtangens Logisticæ ad quadrantem ordinatæ, seu basis, vel sumendo terminorum semisses, ut dimidium subtangentis ad basis octantem, etiam distantiæ centrorum gravitatis à sua basi in solidis à Logistica circa axem, & circa ordinatam revolutis, in eadem proportione erunt; quare cùm, ex Decimotertio Theoremate, centrum gravitatis distet à basi solidi ex Logistica circa axem per dimidium subtangentis, etiam centrum gravitatis solidi ex Logistica circa ordinatam, distabit à sua basi per octantem ordinatæ, ut in hoc Theoremate XIV. proponitur. Q. e. d.

7 In-

7 Intereà hinc habes, data ratione distantiarum centri gravitatis cujusvis figuræ, tum ab axe, tum à basi ( sive ab aliis duabus quibuscumque lineis ) dari & rationem distantiarum centri gravitatis à basi in solidis circa easdem lineas revolutis, atque una istarum determinata, alteram non posse ignorari; quocirca omnium fusorum parabolicorum ex parabolis circa bases revolutis dabuntur centra gravitatis, quippe dantur & centra omnium Conoidum ab iisdem circa axes rotatis productorum, nec ignoratur proportio, secundùm quam gravitatis centrum distat ab axe, & basi infinitarum quarumvis parabolarum; Tu per teipsum, Mi Lector, doctrinam hanc his, aliisq; figuris applicare ne graveris, mihi ad finem properanti immorari diutiùs non vacat, innuisse suffecerit.

8 Neque difficilius erit partium utriusque ex dictis solidis centra eadem arte rimari, quum præmissum ratiocinium non minùs in portionibus figurarum, quàm in ipsis integris figuris locum habere possit, adeòque & ad partes solidorum ab iis descriptorum transferri queat; quæque de his rotundis solidis determinantur, in truncis pariter cylindricis, seu factis ex ductu spatii Logisticæ FBNM in triangula FDG, FEH ( quippe quæ illis rotundis proportionaliter analoga existunt ) pe-

perinde obtinere manifestum est; sed & hinc spontè profluit distantia centri gravitatis ab axe N b in figura N o O Logisticæ




ad axem Correlata, quippe analoga pariter est solido ex Logistica circa ordinatam, cùm ostensum sit *cap.* 10. *num.* 9. lineas O n correspondere rectangulis N n a Logisticæ inscriptis, sive cylindricis superficiebus per idem punctum n in præfato solido transeuntibus.

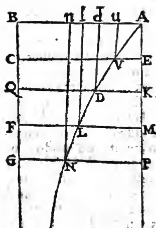
9 Animadvertēdum etiam, ex his quatuor postremis Theorematibus facillimè deduci, quodnam sit æquilibrii centrum in libra longitudine infinita, in qua paribus intervallis dissitæ magnitudines appenderentur in eadem ratione geometrica decrescentes, velut in hac figura se habent A, B, C, D, E, F, &c.

| A | B | C | D | E | F | G | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{64}$ | , &c. |

in infinitum, & quomodò, si illæ magnitudines jam decresce-

rent

rent in duplicata priorum ratione, centrum æquilibrii duplò propiùs accederet termino libræ, unde omnium maxima penderet; Hæc enim ex Undecimo, & Decimotertio Theorematibus constare possunt, si Logisticæ axem veluti infinitam libram orizontaliter dispositam accipiamus, unde Logisticæ spatia proportionaliter deficientia, æqualium tamen latitudinum, pendeant, idemque fiat in axe solidi ex Logistica circa axem rotata geniti, sumptis æquè crassis ejusdem solidi portionibus, &c. Habetur item, dispositis in libra finita magnitudinibus arithmeticè in infinitum crescentibus, quales repræsentant lineæ V u, D d, L l, N n, &c. axi BG, Logi-




sticæ A V D L N parallelæ, & ad ordinatæ partes proportionales A u, u d, d l, l n, &c. applicatæ, sed intervallis geometricè decrescẽtibus inter singulas relictis, itaut geometricæ progressionis terminus libræ extremo respondeat, unde infinita magnitudo suspenditur, assignari posse centrum æquilibrii omniũ ipsarum magnitudinum; & quòd si jam dictæ magnitudines ex iisdem punctis suspensæ crescerent in duplicata priorum ratione, seu procederent, ut numerorum arithmeticè crescentium quadrata (ut se habent circuli in solido ex Logistica circa or-

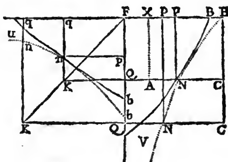
di-

dinatam rotata ) centrum æquilibrii duplò propius fieret maximæ, & infinitæ magnitudini, ultimum libræ extremum occupanti; id enim ex Duodecimo, & Decimoquarto Theoremate abundè innotescit, & sua veluti sponte profluit; Hæc porrò ex iis Problematibus, aut Theorematibus sunt, quæ, si nudè, & extra hanc materiam proponerentur, mirabilia omnibus, nonnullis quoque determinatu impossibilia videri possent.

10 Porrò, cùm Viro illustri demonstrationem *num.* 5. allatam communicassem, scrupulum injecit, an satis tuta esset, ab æquiponderantia singularum superficierum cylindricarum unius solidi, cum singulis circulis alterius, ad ipsorummet solidorum æquilibrium facta deductio: monebat quippe hinc consequens fore, ut ipsarummet planarum figurarum illo modo appensarum æquilibrium fieret ex eodem puncto F, ex quo semper, *vide fig. seq.* P N ad n q esset reciprocè (ob æqualitatem homologarum linearum) ut distantia q F ad distantiam F P; unde solida ex figuris circa axem, æqualia forent solidis ex iisdem circa basim revolutis, quod est absurdum: reposui tamen, vetustam illam esse, ac sæpius convulsam exceptionem Cavallerianæ methodo dudum oppositam; sive prorsus indivisibilia non admitteret, eo modo, quo sub geometricam considerationem cadunt, sive saltem respueret in Staticæ negotio, pro illis reponeret solida quàm minimùm crassa, ut hinc tubos cylindricos, illinc cylindrulos æqualis crassitiei, sive inscriptos, sive circumscriptos præfatis solidis, atque ab iis differentes minori differentia qualibet data, & tum demonstrationem, ( utut minori compendio ) pari evidentia successuram; enimverò ad libram hinc inde appositis æquiponderantibus quantitatibus, atque his, aliis rursus æquiponderantibus additis, modò totidem hinc, totidem inde suspendantur, & utrumque aggregatum æquiponderare. In allato figurarum planarum exemplo conditionem non servari, quippe lineæ P N axi parallelæ non totidem sunt, quot lineæ q n parallelæ basi, siquidem illæ ad basim, hæ ad axem, quibus respectivè applicantur, sunt computandæ, atque eò plures ex alterutra parte sunt, quàm ex altera, quantò major est linea, ad

quam

quam ordinantur, & quantò majori invicem intervallo distant; ideò cautum fuisse in demonstratione (quemadmodum & facit Torricellius de dimens. parab. propos. 20. cujus hæc nostra imitatio est) ut linea F q æqualis sumeretur ipsi Q F, ut circulus radii n q, qui ad illam applicatur, comparari legitimè




possset cum cylindrica superficie ex Q N rotata, & ad punctum Q, distantiamque Q F suo solido inserta; atque utinam id observasset qui solidum hyperbolicum infinitæ latitudinis metiri aggressus est, non enim illud (perinde ac infinitè longum Torricellii) finito cylindro æquale tam præpropere conclusisset, neque exemplis aliis indivisibilium usum in suspicionem adducere tentasset. Si methodi certitudo ex illegitimis applicationibus sit æstimanda, nec Veterum Inscriptiones extra discrimen futuras, quippe iis abusus est Guarinus in suo Euclide methodico, ubi Spheroidis, & Conoidum omnium superficiem ad mensuram vocat, atque ubi generaliter cujusvis Conoidis superficiem ad cylindricam circumscriptam se habere statuit, ut genitrix figura ad rectangulum circumscriptum: Fermatius quoque analyticæ suæ methodi, perquàm pulcherrimæ, ac simplicissimæ, applicatione ad tangentem Quadratricis determinandam infœliciter usus est, necnon VVallisius compositione motuum ejusdem Quadratricis perperam considerata, aliam quidem, sed æquè à veritate alienam ejusdem tangentis constructionem adornavit, uti aliàs

monuimus. Item Guarinus, Sturmius, Borellius, Rinaldinus circa Spiralis Archimedeæ longitudinem hallucinati sunt, quamquàm rem se demonstrasse putaverint, ut in Epist. Geometr. ad P. Cevam ostendo. Quamquàm Viris Clarissimis, ac de Geometria optimè meritis, quorum primus superstes adhuc hanc scientiam novis inventis illustrat, nolim quidpiam hoc loco detractum esse, quum, si quid ipsis fraudi fuerit, humanæ id vitio conditionis, cui omnes obnoxii sumus, tribuendum sit, præclarissimis verò operibus ita sibi Nominis Immortalitatem comparaverint, ac posteros devinxerint, ut nihil his decedere possit, ex quò sublimioribus meditationibus distracti, haud satis attentè perpendere curaverint leviora hæc, quæ ad methodi nostræ defensionem, Lectorumque, quibus prodesse cupimus cautelam adnotare coacti fuimus, *ne à magnis*, ut ait ille, *nominibus præjudicium fieret Veritati*.

11 Opportunè autem (ut ejusdem propositionis usus ampliùs pateat) hìc illam applicare juvat curvis superficiebus, quas gignit curva quælibet B N V, tum circa basim F B, tum

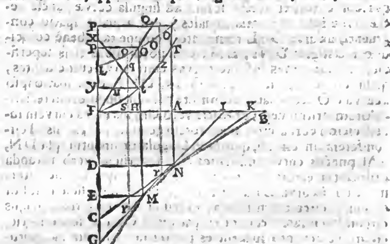
circa axim F Q rotata; utique enim centra gravitatis ejusmodi curvarum superficierum à circulo suæ basis distabunt in iisdem rationibus, in quibus centrum gravitatis curvæ lineæ genitricis, tum ab axe, tum à basi distabat; idque, facta eadem constructione, eodemque ratiocinio manifestum est, sumpto puncto N in curva circa basim, & puncto n simili, eodemque

demque ( seu tantumdem ab homologis extremis distante ) in curva circa axim rotanda ; utique cùm sit linea PN ad qn, ut distantia qF ad distantiam FP ( propter æqualitatem homologarum linearum ) etiam peripheria radio PN in curva superficie descripta per rotationem circa basim, ad peripheriam radio qn descriptam in altera curva superficie ex rotatione ejusdem curvæ circa axem, erit, ut distantia hujus à termino F ad distantiam illius ab eodem termino ; æquiponderant igitur ex F dictæ peripheriæ, aliæque omnes per quævis curvæ genitricis puncta in utraque illa conversione transeuntes, totidemque in una sunt, quot in altera termini æquiponderantes, nam dictæ peripheriæ eamdem curvam, & ad idem prorsus punctum stringunt, unde non plures hinc, quàm illinc computantur; quare & ipsæ superficies curvæ ex eodem puncto F æquiponderabunt, eritq; reciprocè, ut una superficies ad alteram, sive ut distantia centri gravitatis curvæ à linea, circa quam hinc, & illinc convertitur, ita distantia centri gravitatis hujus ad distantiam centri gravitatis illius, uniuscujusque nimirum à circulo suæ basis per F transeuntis. Unde mirùm quot Conoidum superficies centrum gravitatis sibi determinent. Quæcumque autem de solidis rotundis, deque rotundis superficiebus ex eadem figura, vel linea qualibet circa axem, & circa basim rotata dicta sunt, perinde similiter obtinere in Ungulis solidis, aut superficialibus, plano per axem, vel basim transeunte, & ad eumdem angulum utrinque inclinato, abscissis ex cylindris super easdem figuras erectis, clariùs est, ac inter Geometras magis vulgatum, quàm ut hìc à nobis exponi indigeat, ob proportionalitatem, tum triangulorum similium, quibus Ungulæ solidæ secantur, cum circulis rotundorum solidorum, tum laterum Ungularum superficialium, cum peripheriis circularibus rotundarum superficierum homologarum.

12 Quamquàm in nostro proposito Logisticæ, utique tota curva centro gravitatis carere censenda est, adeòque ad invenienda utriusque superficiei curvæ, ambarum ejus Conoideon, centra gravitatis, observatio nostra in hoc, & similibus casibus inutilis manet; Ratio est, quia si quod habe-

 ret

ret gravitatis centrum curva Logistica B N M, illud certè in axe non foret, eò quòd curva suam convexitatem illi obvertat; sed neque in ulla ab axe distantia; quantilla enim hæc foret, circumferentia à tali centro descripta, in conversione curvæ circa axem, determinatæ alicuius longitudinis esset, & rectangulum ex ipsa in curvam infinitam Logisticæ, adeòque & superficies curva, in rotatione circa axem descripta, immensæ magnitudinis foret; cùm tamen finitam esse sic demonstretur. Ad quamlibet ordinatam D N, aut illi parallelam F A B, applicentur ipsæ tangentes N C, M G; itaut

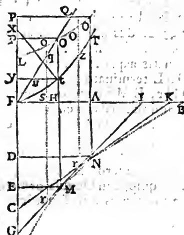



* *interponenda esset litteris* H, *&* A *littera* s

ductis axi parallelis N A O, M H O, secetur A O æqualis tangenti N C, & H O æqualis tangenti M G; atque ita semper, quousque compleatur figura A O O L F. Dico (non in Logistica modò, sed in quavis curva, facta simili constructione) spatium hujus figuræ esse ad curvam superficiem ex rotatione curvæ M N circa axem D E, ut radius ad circumferentiam alicuius circuli; id quod valet etiam de partibus proportionalibus, putà superficie O A H O, comparata ad por-

portionem curvæ superficiei à curva M N, parallelis M H O, N A O intercepta, progenitam; sumpta siquidem quantumlibet parva tangentis particula N r, aut M r, ac ducta parallela r s; cùm sit tota N C, idest O A, ad N r, ut D N, vel F A, ad A s (eodemque modo G M, seu O H ad M r, ut E M, vel F H, ad H S) erit rectangulum O A s æquale rectangulo ex D N in N r, & O H S æquale rectangulo ex E M in M r; atque ita semper; itaque Ungula superficialis ex cylindrico ipsi curvæ N M insistente, resecta plano per axem transeunte, & per 45. gradus ad planum basis inclinato (in qua consequenter erectæ forent ad singula curvæ puncta rectæ lineæ ipsis ordinatis æquales) erit æqualis spatio congruenti, à curva O o L terminato; quippe tam benè coincident rectangula D N r, E M r cum portionibus talis superficiei, ob tangentes infinitè parvas cum curva coincidentes, quàm coincident rectangula O A s, O H S, cum spatio ipso à curva o O terminato, ob infinitè parvam singulorum rectangulorum latitudinem; prædicta verò Ungula est ad curvam superficiem à curva circa axem rotata genitam, ut radius ad circumferentiam circuli, quippe in Ungula ordinantur ipsæ D N, E M, punctis curvæ insistentes, in superficie verò rotunda ordinantur earumdem peripheriæ; itaque spatium sic determinatum à curva O o L erit ad rotundam superficiem solidi ex curva circa axem rotata, ut radius alicujus circuli ad ejus circumferentiam; & quoties spatium A O o L F finitum erit, etiam illa rotunda superficies pariter determinatæ magnitudinis esse convincetur; est autem illud spatium finitum, quoties A O, H O, idest ipsæ tangentes N C, M G in immensum non excrescunt, uti accidit in nostro casu, in quo semper fiunt minores, utpote æquales potentia eidem quadrato subtangentis, simul cum quadrato ordinatæ minoris, ac minoris in infinitum; quò constat spatium A O L F, cujus longitudo determinata A F, latitudines autem ubique A O, H O, & cæteræ, nedum non infinitæ, sed semper minores, usque ad ultimam F L soli subtangenti æqualem, infinitum esse non posse, imò esse minus rectangulo F A O illud circumscribente.

13 Manifeſtum eſt porrò, curvam O o L in hoc caſu eſſe hyperbolam æquilateram, axe recto F A, ſemitranſverſo F L, ſubtangentis longitudinem æquante, deſcriptam, quippe ultima tangentium, evaneſcente ordinatæ quadrato, erit potentia, adeòque & longitudine, æqualis ſoli ſubtangenti; intellecta igitur F D eidem æquali, ut integer axis tranſverſus ſit D L,




atque ordinatis O P, o P; quoniam differentia quadrati tangentium, ſive ejus æqualium H O, vel A O, ideſt F P, F P, à quadrato ſubtangentis F L, eſt quadratum ordinatæ E M, aut D N, ſive ipſarum O P; erit ſemper rectangulum D P L æquale quadrato P O, adeòque hyperbola L O o æquilatera.

14 Eſt autem hyperbolicum ſpatium A O o L F æquale rectangulo ex ſubtangente Logiſticæ in parabolicam curvam illam, quæ Logiſticam perpendiculariter ſecat, juxta determinationem *cap. 5. num.* 14. propoſitam, quæque eamdem, ſeu æqualem ſuſcipit ordinatam, aut eiſdem axi parallelis interjicitur; ſit enim ejuſmodi parabola F t T, cujus ſemiparameter æqualis ſubtangenti Logiſticæ, videlicet F L, tangenti in

pun-

puncto t, seu ipsi curvæ perpendicularis t X abscindens ex axe infra ordinatam t y ipsam y X æqualem semiparametro, seu ipsi F L (juxta ibidem dicta) itaque X t æquabitur H O, & ducta quavis axi parallela, erit X t ad X y, seu O H ad L F, ut quævis tangentis portio, lineis infinitè proximis H t, S q intercepta, ad ordinatæ y t portionem, iisdem lineis interpositam; rectangulum itaque ex hac ordinatæ portione in H O semper æquale erit rectangulo ex constante linea F L in illam tangentis portionem, omniaque rect-la spatio hyperbolico adscripta æquabuntur rectangulo ex F L in curvã parabolicam F t T, ac partes partibus correspondentibus; itaque rectangulum sub circumferentia, radio F L, seu subtangentis Logisticæ descripta, in curvam parabolicam F t T, æquale erit curvæ superficiei rotundi solidi ex Logistica N M circa axem voluta progeniti, partes etiam correspondentibus partibus æquabuntur, & talis curvæ superficiei portiones, planis quibuscumque D N, E M interceptæ, erunt ut partes parabolicæ curvæ t T, inter axi parallelas ab iisdem curvæ punctis ductas conclusæ.

15 Affine huic est, quod in solido ex Tractoria circa axem revoluta nuper detexi, nempe applicatis tangentibus ad singula ordinatæ puncta, quæ, utpotè æquales, cõflabunt superficiem parallelogrammam A O P F, subtangentis longitudine, & ordinata contentã, erit infiniti illius solidi superficies æqualis superficiei cylindricæ ex F A O P circa axem revoluto, quippe quæ pariter ad parallelogrammum O F sit, ut circumferentia ad radium; quapropter etiam curva Tractoria gravitatis centro carere dicenda erit, sicut Logistica, & aliæ quævis interminatæ lineæ, finitam superficiem sui rotatione describentes.



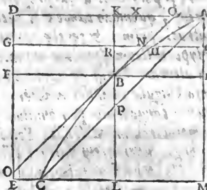
CA-

# CAPUT XIII.

*Theorema Decimumquintum in quinque partes divisum aliàs demonstratum. Figurarum ad eumdem axem compositarum, si portiones unius proportionentur ordinatis alterius, quomodo tangentes determinandæ. Alia demonstratio primæ, & tertiæ partis hujus Theorematis. Hyperbolicum spatium æquale rectangulo ordinatæ in alteram Logisticæ subtangentem. Tangens Expansæ Ungulæ cylindricæ determinata. Generalis constructio tangentium pro omnibus ungulis etiã ex cylindro non circulari abscissis. Solidi ex Logistica infinitè longi superficiem finitam esse rursus demonstratur. Hyperbola ungulæ Logisticæ correlata; ut parallelogrammum Logistico trilineo circumscriptum ad ipsum trilineum, ita cylindricus Logisticus ad suum truncum, ita & Hyperbolicus cylindricus ad truncum suum. Rotundum solidum ex hyperbola ad rotundum ex Logistica, ut inscriptum hyperbolæ parallelogrammum ad Logisticæ subtangentis quadratum. Cæteræ Theorematis partes ex longioribus Logarithmorum tabulis determinandæ. Auctoris verba circa hyperbolæ quadraturam ex Tractatu de evolutione curvarum adducta. Hyperbolæ quadratura per Tractoriam.*

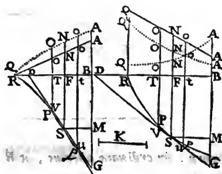
1 ULtimum Hugenii Theorema quinque partes complectitur, quas demonstraturus, & simul referam, & suis asteriscis, ordinis, & claritatis servandæ gratia, distinguam: ait

ait igitur: *1 *Notum jam est, hanc Logisticam lineam tetragonismo hyperbolæ deservire, post demonstrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa hyperbolica spatia, duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjecta.* *2 *Quòdque si duo fuerint hujusmodi spatia, in quibus ordinatæ unius sint, ut AD ad HG*




*in ultima figura, & ordinatæ alterius, ut B F ad C E, hæc spatia erunt inter se, ut lineæ D G, & F E.* *3 *Nondum autem, quod sciam, notatum fuit, hæc ipsa spatia hyperbolica esse ad parallelogrammum hyperbolæ (sic voco parallelogrammum, cujus latera sint duæ ad utramque asymptoton ordinatæ ex eodem puncto sectionis ductæ) ut unaquæque linearum D G, F E ad subtangentem F O.* *4 *Adeòut, si parallelogrammum hyperbolæ supponatur partium* 0, 4342944819, *quodlibet hyperbolicum spatium duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjectum erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet, ut differentia Logarithmorum numerorum, exprimentium proportionem ordinatarum, ad numerum* 0, 4342944819; *acceptis scilicet Logarithmis decem notarum ultra characteristicam.* *5 *Hinc porrò facile est veritatem ostendere Tetragonismi hyperbolæ, abs me propositi in Tractatu de Evolutione linearum curvarum, quem Horologio meo oscillatorio inserui.*

2 Primam, & secundam partem jam *cap. 6. num. 2. 3. & 4.* abundè ostendimus; tertiam quoque partem, adeòque & reliquas ex his consequentes, ibidem *num. 6.* & 7. in aperto posuimus, ut nihil opus sit superaddere, plenioris tamen scientiæ, atque Lectorum utilitatis gratia, rursus eadem demonstrare aggrediar, generali hoc Lemmate præmisso, quod & in præcedentibus quadantenus attigimus: nimirum. Si duo spatia quælibet AQRB, SRB ad eumdem axem BR




comparata fuerint, itaut semper unius portiones, à termino QR computatæ, proportionales sint ordinatis alterius, putà FNQR ad OTRQ, ut FS ad TP; manifestum est, quòd constans quædam linea K se habebit ut parameter comparationis (eo modo, quo *capite 4. num. 2.* parametrum Logisticæ exposuimus) itaut, si K in FS adæquet spatiū FNQR, etiam K in TP adæquet spatium TOQR; fiat ergo, ut K ad FN, in FD ad FS (seu ponatur NFD rectangulum æquale spatio NFRQ) dico junctam DS tangere curvam RPS in S. Patet id, tum ex *cap. 6. num.* 8. ubi generaliter monuimus, in curvis præmissæ conditionis, esse GM ad SF, idest, ob triangula similia, FB ad FD, aut rectangulum alteri figuræ adscriptum BFN ad NFD, ut idem rectangu-

lum

lum ad spatium NFRQ, quod propterea æquabitur ipsi NFD rectangulo, eritque, ut K ad FN, ita FD ad FS, quippe cùm tam extremorum, quàm mediorum rectangula eidem NFQR spatio sint æqualia; tum etiam constat ex dictis *capite 5. num. 6.* & 7. ubi ex motuum compositione hanc ipsam tangentium constructionem, data præscripta figurarum conditione demonstravimus; tum denique hoc argumento; ordinentur hinc inde OTV, otu secantes curvam in P, p, rectam verò DS in V, u; quoniam ex constructione est spatium NFRQ æquale rectangulo NFD; est verò NFt minus spatio NFto, & NFT majus spatio NFTO in figura dextra, ubi curvæ RS convexum axem respicit, & è contra in figura sinistra majus NFt, quàm NFto, minus NFT quàm NFTO, ubi curvæ RS concavum axi obversum est, erit residuum ex NF in TD, aut aggregatum ex NF in tD, minus spatio otRQ, majus spatio OTRQ in prima figura, & è contra majus spatio otRQ minus OTRQ in secunda, seu respectivè minus, & majus, majus, & minus rectangulo ex K in ordinatam tp, TP, quippe quod juxta constructionem tali spatio æquatur; habebit ergo NF ad K, idest SF ad FD, aut ut ad tD, VT ad TD, minorem, & respectivè majorem in prima figura, seu majorem, & respectivè minorem rationem in secunda, quàm habeat tp ad eamdem tD, seu TP ad eamdem TD; ideòque tp, & TP in prima figura majores erunt, quàm ut, & VT, minores autem iisdem respectivè sumptis in secunda Lectoris dexteram respiciente; & ideò puncta curvæ P, p, erunt utrobique extra rectam DS; quæ propterea tangens erit. Quod fuerat demonstrandum.

* *Animadvertendum in figura sinistra hujus Schematis, in quo duæ figuræ AOQR sunt decrescentes ad partes AB, tertiam iisdem litteris notatã decrescentem ad partes oppositas RQ (quod attinet ad hoc propositum) superfluere, neque ad hoc notatam esse, ut huic constructioni inserviat, quum evidens sit, numquam contingere posse, ut concavitate curvæ RSG ad axem RB conversa, figura superior QRBA ad partes RQ deficiat, esset enim rectangulum NED, non æquale, sed majus spatio NFRQ.*

3 Cùm igitur ex dictis *cap. 6. num.* 4. lineæ in Logistica QRS axi BV parallelæ, veluti FS, PR sint ad invicem, ut spatia hyperbolica NORQF, ORQP (existentibus ABQ asymptotis, ordinatisque FN, PO, QR alteri asymptotorum parallelis) patet spatium hyperbolicum ORQP æquari rectangulo OPD, ex ordinata OP in alteram Logisticæ subtangentem PD; unde constat, quomodo Logistica hyperbolæ quadraturæ conducat, utì in prima hujus Theorematis parte asserebatur; secundam partem citrà petitionem principii probare hinc nequeo, sed satis evidenter præostensam habes loco citato. Tertiæ partis demonstratio sic erit instituenda. Rectangulum OPD æquale est, ex dictis, spatio hyperbolico ORQP; habebit ergo parallelogrammum hyperbolæ inscriptum KOPB ad spatium OPQR eamdem rationem, quam idem habet ad rectangulũ OPD; idest quam basis BP, seu TR ad PD; aut, ob triangulorum similitudinem, quam subtangens Logisticæ GT ad axi parallelam RP. Quod erat demonstrandum.

* *Supple in figura lineam QR ipsi NF parallelam, ut pag.* 63.

4 Obi-

4 Obiter notare potes in demonſtratione *num.* 2. allata, quot curvarum tangentes geometricè determinari queant, præſcriptam nimirùm conditionem ſuſcipientes. In Expanſa ſphærica ſuperficie, ſive Ungula quavis cylindrica in planum extenſa ( qualem in Demonſtrationibus Vivianeorum Problematum conſideravimus ) ſpecimen hìc dumtaxat daturi ſumus. Eſto ejuſmodi ſuperficies Ungularis Expanſa B Q S C; cui inversè ad eumdem axem altera ſimilis, & æqualis, ſive eademmet replicata, A N B Q applicata eſſe intelligatur. Conſtat ex Propoſitiòne quinta Demonſtrat. Vivian. Probl. fore totã ſuperficiem B A Q ad partem A N F Q reſectam quavis ordinata N F, ſecante alteram curvam in S, ut ordinata B C ad F S, quia ordinata F N tantumdem diſtat à baſi A Q in figura A B Q, quantùm F S à vertice Q figuræ Q B C; itaque, ſi fiat rectangulum N F D æquale ſpatio A N F Q, juncta D S erit tangens, juxta ea, quæ *numer.* 2. generaliter demonſtravimus. Et ſi ſupponatur Q B C eſſe Ungula plano ſemiquadrantaliter inclinato abſciſſa, ſeu eadem, ac figura ſinuum inſcripti quadrantis B C I, quem axi parallela S L ſecet in G, tangat verò in eodem puncto G K, erit tum F D æqualis K G; demiſſo enim ſinu G E, ac jun-

cto

cto radio G B, quemadmodum S F æquatur sinui G E, erit F N æqualis sinui G L, seu E B; est autem superficies A N F Q æqualis radio B C, vel B G in ipsam E G, vel B L (uti constat ex eadem Propositione quinta, vel ex decimaquinta particulatim acceptis) itaque rectangulum N F D æquatur ipsi B G E; porrò hoc æquale est E B in K G, propter G B ad E B, ut K G ad G E; itaq; N F D æquatur E B in K G, suntque



* *Deficit in Diagrammate linea B G radius quadrantis, de quo in præsenti Demonstratione.*

N F, E B æquales; ergo & F D æqualis erit tangenti G K; eidemque quantitati æqualis erit (idest semper erit D F ad F Q, ut tangens ad arcum lineæ Q F congruentem antequàm in planum evolveretur, uti est hic arcus G I) etiam si Ungula semiquadrantalis non sit, curvarum enim eumdem axem, & ordinatas proportionales habentium eadem est, respectu ejusdem à vertice altitudinis, constans subtangens F D.

5 Quinimò & si Ungula non ex circulari cylindro, sed ex parabolico, hyperbolico, aut alterius generis curvæ insistente resecta foret, eadem posterior constructio locum obti-

tineret, quippe & in illis hoc semper evenit, ut (si fuerint semiquadrantales, ideſt inclinatione semirecta abſciſſæ) inſcripta figura genitrice (quæ cylindri baſis erat) BCGI, ductaque axi parallela qualibet SGL, erit SL æqualis arcui curvæ GC; nam & tota BQ æqualis eſt curvæ IGC, circa quam in cylindro convolvebatur; & portio QF æqualis portioni IG, utpote ſuſcipiens ordinatam FS æqualem ſinui GE, cui æqualis erigebatur in ſuperficie cylindrica ad punctum G nondum expanſa, adeòque & reliqua FB, ſeu SL æqualis reliquæ portioni GC; His itaque exiſtentibus, ductaque ad punctum G tangente genitricis curvæ GK, atque huic poſita æquali FD, oportet, junctam DS tangere curvam Ungulæ ſic expanſæ, etenim hinc inde ductis parallelis VPHmRT axi propiori, hupmrt remotiori, ſecantibus lineas, ut in figura videre eſt; cùm ſit DF ad HV, vel hu, ut FS ad SH, ſeu Sh, vel KG ad tangentem Gm, poſita jam DF æquali KG, erit prædicta Gm æqualis HV, ſeu hu; verùm propter SL, ſeu HT, vel ht æqualem curvæ GC, & PT, vel pt æqualem RC, ſeu rC, erit HP, vel hp æqualis curvæ GR, vel Gr: eſtque RG minor, ſicut è contra rG major tangente mG; itaque HV major eſt quàm HP, minor verò hu, quàm hp; & utrobiq; puncta V, u rectæ DS ultrà curvam QPSpC: tangit ergo, utì propoſitum fuerat; eademque FD ſubtangens erit omnium aliarum Ungularum etiam non ſemiquadrantalium, propter ordinatas ad eadem axis puncta F ſemper proportionales.

6 Quanta hinc, Deus bone, Veritatum ſeges enaſcitur! At mihi non in hoc campo ſeritur, metiturve, antequàm aliàs promiſſum Sphærocylindricarum Sectionum tractatum invulgem; Unum hoc non diſſimulabo ad Logiſticam pertinens, quo ſimul uſum doctrinæ quadantenus inſinuabo, Nimirùm, ſuperficiem ex Logiſtica circa axem revoluta finitam eſſe, uti ſupra *capite præcedenti, num.* 12. & 13. jam monuimus, ex quò Ungula ſemiquadrantalis ex cylindrico ſuper Logiſticæ curva erecto æqualis foret ſpatio hyperbolico ibidem deſignato, hinc etiam ſponte profluere. Eſto

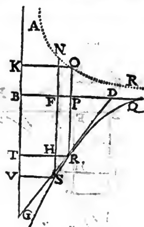
enim

enim talis Ungula cylindrica in planum extensa FBSS, cum inscripta sibi Logistica genitrice FBNM; ducta igitur axi parallela ANS, erit ubique AS æqualis curvæ BN,

& tangens Ungulæ ad punctum S erit SD, itaut DT subtangens æqualis sit tangenti NC Logisticæ ad punctum N; æqualis est ergo potentia DS, tum tangenti CN (idest ordinatæ AO in spatio hyperbolico, quod loco citato determinavimus) tum ipsi TS, seu FA; itaque juncta FO erit æqualis ipsi DS, sed & inter easdem parallelas consistunt; æquidistat igitur FO tangenti DS; & hoc semper; figura igitur FLOO est correlata Ungulæ FBSS; illique propterea est æqualis integrè, & particulatim, juxta doctrinam *cap. 8. num.* 3. Immò & hoc ipso ratiocinio generaliùs concepto, posset è contra eadem de Ungularum tangentibus determinatio in omnibus demonstrari. Hinc enim habetur, figuram ex tangentibus CN ad FB applicatis esse Correlatam Un-

Ungulæ F B S S ( quæcumque fuerit curva B N M ) atque adeò tangentes Ungulæ esse parallelas ramis figuræ ex ipsis C N, cui integrè, & particulatim correspondet ex dictis *cap. præced. num.* 12. illationem firmantibus iis, quæ *cap.* 8. circa finem *num.* 5. monuimus.

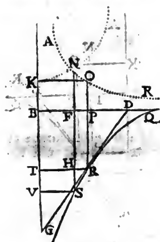
7. Jam & illud observandum volo, quòd ex secunda hujus Hugeniani Theorematis parte manifestò liquet, solidum hyperbolicum ex spatio O P Q R circa O P rotato esse ad solidum ex spatio Logisticæ correspondente T R Q B circa B Q




in eadem semper ratione, in ea videlicet, in qua parallelogrammum hyperbolæ inscriptum K O B P ad quadratum subtangentis Logisticæ T G; quoniam enim spatia hyperbolica lineis O P abscissa à termino Q R proportionalia sunt axi parallelis P R in trilineo Logisticæ R Q P, si cylindricus excitetur super spatio O P Q R, idemque secetur plano per O P transeunte, ad basim semiquadrantaliter inclinato, erit cylindricus ejusmodi ad truncum inferiorem, plano secante, & basi interceptum, ut parallelogrammum R P Q ad trilineum Q P R (id quippe convincit demonstratio, qua in Vivianeis

 usus

usus sum ad Proposit. septimam, *pag*. 52. propositam, ubi ostendi, cylindrum ex ductu quadrati a c, in figura loco citato adhibita, in Expansam superf. sphericæ I Z A C, esse ad truncum ex triangulo I C I in eamdem, ut quadratum, seu parallelogrammum c a l i, Expansæ inversè positæ i d a circumscriptum, ad talem Expansam; quippe id ex hac sola affectione pendebat, quòd esset semper A Z I C ad partem F Z A C, ut linea a c, seu R P ad P d, prout in aliis benè multis figuris, ac præcipuè in casu nostro verificatur) similiter in eadem ratione rectanguli R P Q ad trilineum Q R P,




erit etiam cylindricus super basi Q B T R erectus, ad truncum inferiorem, interceptum eadem basi, ac plano similiter per B Q inclinato, eò quòd partes etiam spatii Logistici Q B T R per ordinatas à termino T R abscissæ, proportionentur lineis in eodem trilineo Q R P basi P Q parallelis, uti ex primo Hugenii Theoremate, ac dividendo, constat, sunt enim tales parallelæ differentiæ ordinatarum ad cavam Logisticam, veluti spatia sic intercepta differentiæ spatiorum iis ordinatis proportionalium; est igitur cylindricus super O P Q R,

OPQR, cujus altitudo PQ (ob semiquadrantalem inclinationem plani secantis) ad suum truncum inferiorem, ut cylindricus super BTRQ, altitudine BT, ad similem sui truncum, & sumptis consequentium æquè proportionalibus (est enim quivis truncus ad rotundum solidum ex basi circa eamdem lineam, quæ est basis, & plani secantis communis sectio, rotata, ut radius ad circumferentiam, ut *cap.* 10. circa mediũ *num.* 1. ostendimus) erit cylindricus hyperbolicus ad rotundum ex OPQR circa OP, ut cylindricus Logisticus ad rotundum ex sua basi circa BQ; ac permutando, ut ille cylindricus ad istum, ita illud rotundum solidum ad hoc, quod ultimò expressimus. Verùm illi cylindrici in composita sunt ratione altitudinum PQ ad BT, seu, sumpta communi latitudine TG, PQ in TG ad GTB, & basium, scilicet spatii hyperbolici, quod æquatur ex dictis suprà *num.* 3. rectangulo OPD, ad spatium Logisticum, quod æquale est ex sæpe dictis rectangulo PQ in TG; itaque & rotunda solida supra descripta, Hyperbolicum ad Logisticum, in composita erunt ratione, rectanguli OPD ad PQ in TG, & hujus ad GTB, idest, ut OPD ad GTB, quæ denique cùm componatur ex PD ad BT, seu PR, vel dicas ex TR, seu BP ad TG, & ex OP ad eamdem TG, dabit rationem rectanguli hyperbolæ inscripti OPBK ad quadratum subtangentis Logisticæ TG. Quod erat demonstrandum.

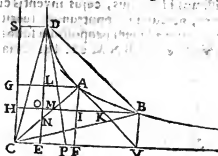
8 Quarta pars demonstratione non indiget, sed prolixiorum, quàm apud nos sint, tabularum Logarithmicarum calculo, quippe assignato longitudini subtangentis Logisticæ numero, per quem Hugenius hyperbolæ parallelogrammũ designat, tunc distantia duarum ordinatarum Logisticæ exhibebit Logarithmum rationis earumdem ordinatarum (juxta naturam hujus curvæ *cap.* 1. *num.* 3. indicatam) seu differentiam Logarithmorum respondentium numeris, inter quos est ordinatarum Logisticæ, ac consequenter & ordinatarum hyperbolæ, ratio, unde cùm sit subtangens ad intervallum ordinatarum Logisticæ, ut parallelogrammum hyperbolæ ad congruum spatium hyperbolicum; ideò per Logarithmicas tabulas facilè erit hinc æstimare, & calculo eruere numerum cor-

respondentem cuilibet dato hyperbolico spatio, data ejus extremarum ordinatarum ratione.

9 Quinta similiter Theorematis pars, pertinens ad Tetragonismum Hyperbolæ à Clarissimo Auctore in Tractatu de Evolutione curvarum exhibitum; vel de modo quadrandi hyperbolam per rectificationem curvæ parabolicæ intelligenda est, vel per Logarithmos; utrumque enim in præfato libello insinuatum video; si primum, jam ex *cap. præcedenti, num.* 14. habes hyperbolicum spatium æquale esse rectangulo ex Logisticæ subtangente, seu generaliùs, ex semitransverso latere hyperbolæ in curvam parabolicam, dupla parametro descriptam, iisdemq; axi parallelis terminatam. At si (quòd aptiùs judicarim) de altero modo per Logarithmos accipienda sit, quemadmodùm & præcedens pars, solo calculo indiget, ac ingentium Logarithmorum tabulis, quæ etsi mihi in promptu essent, vereor, ut otii, & patientiæ satis habiturus sim, ut ejusmodi calculum expenderem, quem idcircò laborem his, qui se ejusmodi studiis exercere voluerint, integrè, & ultrò relinquam, siquidem tempus admonet, ut receptui canam, ac Philosophiæ me restituam; ipsum tamen locum ab Hugenio hìc citatum, ex ejus Tractatu de Linearum Evolutione *pag.* 75. Jacobi Panzanini Viri Cl. aliàs abs me infra meritum laudati opera descriptum (quippe exemplari carebam) hìc subjungere non gravabor, ne quid Lectoribus desit ad hanc Logisticæ proprietatum ab Hugenio propositarum demonstrationem illustrandam. Inquit igitur Hugenius:

10 *Quæcumque verò Problemata ad alterum è duobus hisce reducuntur, quamlibet vero proximam solutionem per numeros accipiunt, Logarithmorum admirabili invento. Cùm per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quàm proximè explicetur; est autem regula hujusmodi. Sit D A B portio hyperbolæ, cujus asymptoti C S, C V, ductis D E, B V parallelis asymptoto S C. Accipiatur differentia Logarithmorum, qui conveniunt numeris, eamdem inter se rationem habentibus, quā rectæ D E, B V; ejusque differentia quæratur Logarithmus, cui addatur Logarithmus hic (qui semper est idem)* 0,36221, 56887. *Summa erit Logarithmus numeri, qui spatium*

*D E*




*DEVB AD designabit, tribus rectis, & curva DAB comprehensi, in partibus, qualium parallelogrammum DC est* 100000, 00000. *Unde porrò facilè quoque habebitur area portionis DAB. Sit exempli gratia proportio DE ad BV ea, quæ* 36 *ad* 5.

| | | |
|---|---|---|
| *Ab* | 1, 55630, 25008 | , *Logarithmo* 36. |
| *Auferatur* | 0, 69897, 00043 | , *Logarithmus* 5. |
| *Erit* | 0, 85733, 14965 | , *Differentia Logarithmorum.* |
| *Et* | 9, 93314, 92856 | , *Logarithmus differentiæ.* |
| *Cui addatur* | 0, 36221, 56887 | , *Logarithmus semper addendus.* |
| *Fit* | 10, 29536, 49743 | , *Logarithmus spatii DEVB AD* |

*Habebit hujus Logarithmi numerus* 11 *caracteres, quum characteristica sit* 10. *quæratur itaque primò numerus proximè minor, conveniens invento Logarithmo, qui numerus est* 19740. *Deinde ex differentia Logarithmi ejusdem, & proximè eum in Tabula sequentis, reliqui characteres eliciantur* 81026, *scribendi post priores, ut fiat* 197408, 10260, *addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterū* 11, *est ergo area spatii DEVB AD proximè partium* 197408, 10260, *qualium partium parallelogrammum DC est* 100000, 00000.

Hæc

Hæc Clarissimus Hugenius, cujus inventis circa hyperbolæ quadraturam, nescio an opportunum fuerit è meditationibus nostris aliquam ad idem propositum subnectere. Ea est, quòd, si intelligatur curva B N M esse Tractoria, cujus prima

ordinata F B, axis F G, sitque B vertex, F centrum hyperbolæ æquilateræ, cujus semitransversus axis F B: ducta ex quovis puncto H axi Tractoriæ parallela H M, erit triangulum, basi F B, altitudine H M, æquale hyperbolico trilineo, axis portione H B, tangente hyperbolam ex puncto H, & curva intercepta hyperbolæ comprehenso, uti ex nostra doctrina de Figuris Correlatis deduci potest. Atque hic esto nostræ

HUGENIANORUM THEOREMATUM CIRCA LOGISTICAM DEMONSTRATIONIS

FINIS.



# LECTORI S.

*Visum fuit Appendicis loco hìc subnectere Epistolam Geometricam, dudum scriptam ad Virum Clariss. Thomam Cevam, & Poeticis, & Geometricis Opusculis Celeberrimum, tum quia simili, & uniformi cum præcedentibus stylo procedit, tum quia pluribus in locis doctrinas à nobis superiùs traditas illustrat, & variis exemplis applicat, tum quia num.* 19. *non contemnendam animadversionem continet ad hujus Tractatus argumentum spectantem, de* Logistica *scilicet ex quodam cylindro resecta; quam æquum fuerat his* Hugenianis *circa* Logisticam *meditationibus subnectere. Vale.*



# EPISTOLA
## GEOMETRICA
### *AD VIRUM CLARISSIMUM*
# THOMAM CEVAM
### SOCIETATIS JESU.

*Nostra Doctrina de Conicæ superficiei dimensione per P. Cevam ex Pappo confirmata. Spiralium diversi generis origo. Quælibet Conica superficies quomodo in planum explicanda, & quævis plana figura quomodo Cono advolvenda. Quarumvis linearum in Coni superficie descriptarum Ichnographias determinare, & datis Ichnographiis, lineas in Coni superficie iis respondentes reperire. Curvarum transformatio, ad illas comparandas utilis. Ichnographiarum omnium, linearumque ex Coni superficie in planum explicatarum tangentes duplici methodo inventæ. Nova ejusdem supradictæ nostræ doctrinæ confirmatio. Ad Cono cylindricæ Spiralis extensionem in planum,*

*ostenditur Spiralis Archimedea, & Apollonianæ Parabolæ æqualitas. Quorumdam lapsus notati. Infinitarum Parabolarum, & Spiralium comparatio. Novus Cycloidem rectificandi modus. Transversa cylindri Cycloidalis sectio Parabolæ æqualis, Ungula quoque nil nisi Parabola complicata esse dignoscitur. Rotunda superficies ex Cycloide circa basim, dupla ejus, quæ ab ipsa circa tangentem verticis rotata producitur. Cylindrum invenire, cujus transversa Sectio propositæ cuilibet curvæ sit æqualis, & Ungula in quamlibet figuram datam explicetur. Ex cylindro Tractoriæ secanda est Logistica. Curva Conocylindrica Spiralis cuidam Parabolæ, longitudine, non positione, æqualis est. Dimensio superficiei cylindricæ, utrique spirali, & axi Coni interjectæ. Si Spiralis fuerit Geometrica, explicata illa cylindrico-spirali superficie, in rectam expandetur.*



PRÆ-

PRÆSTANTISSIMO GEOMETRÆ,
AC VATI ELEGANTISSIMO

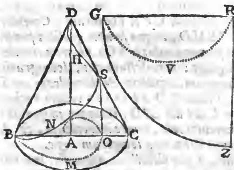
# P. THOMÆ CEVÆ

E' SOCIETATE JESU

*D. Guido Grandus Monachus Camald. S. P.*

EX quo me litteris tuis decorare cæpisti, Vir in paucis Cariſſime, nullas, aut mihi magis jucundas, aut Geometrica eruditione magis refertas accepi, iis ipſis, quas XVI. Kal. Julii ad me deſtinaſti. In his, pari humanitate, ac ingenio, doctrinam ſecundæ Propoſitionis Appendicis meæ ad Vivianeorum Problematum Demonſtrationem illuſtrare aggrederis,& minimè contemnēda animadverſione confirmare, oſtendens ipſam cum Pappo Alexandrino conſentire, & ad novas rurſus ſpeculationes viam ſternere poſſe. Sic enim habes, totidem penè verbis tuis latinè redditis.

1 *Eſto Conus rectus D B C, cujus triangulum per axem ſit*




*D B C, baſis verò circulus B M C: intelligatur latus D B, pun-*

*cto D fixo manente, altero extremo B per circumferentiam præfatæ basis B M C æquabiliter circumferri; eodemque tempore punctum B, æquabili pariter velocitate, ex B per lineam B D ascendere; describens in Coni superficie Spiralem B S D; adeò ut eodem momento, & latus B D se in situ B D restituat, & punctum B ascensus sui terminum D attingat, ubi & Spiralis B S D terminus erit. Manifestum est, Coni superficiem, si evolvatur, & explicetur, in circuli sectorem abituram, qualis est R G Z, cujus semidiameter R G lateri D B æqualis erit, & arcus G Z circumferentiam B M C B adæquabit. Notum pariter est, Spiralem Conicam B S H D in planum extensam, Spiralis Archimedeæ portionem G V R evasuram. Consideretur jam Spiralis Conica B S H D, in qua sumpto quolibet puncto S, demittatur ad basim perpendicularis S O: idem ex omnibus ejus punctis factum intelligatur; manifestum erit, Ichnographiam prædictæ lineæ fore integram Spiralem Archimedeam, ut liquet in triangulo D A C, in quo C D ad D S in eadem ratione est, in qua semidiameter C A ad A O; idemque in quovis alio per axem triangulo dicendum erit, quare incrementa, & decrementa ipsius A O erunt in ratione temporum, &c.*

2. *Hoc posito, ( per Coroll. 2. Appendic. tuæ Vivian. Probl. ) erit, ut D B ad semidiametrum B A, idest, ut tota superficies Conica B C D, vel extensa R G Z, ad circulum B M C, ita spa-*

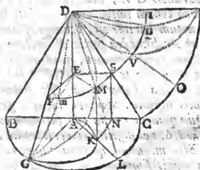
*tium*

*tium superficiei Conicæ B S H D B, idest Spirale segmentum GVR, ad spatiū integra Archimedis Spirali contentum, B O A B, & permutando, erit sector R G Z ad segmentum G V R, ut circulus B M C ad integrum Spirale spatium B O A B; propterea que sector R G Z triplus erit segmenti Spiralis G V R; id quod verissimum est, per Prop. 21. lib. 4. Pappi. Unde hac Geometrica confirmatione doctrinæ tuæ novum robur accedit.*

3 *Ponamus jam, lineam G V R esse circuli semicircumferentiam, sectorem verò R G Z circularem quadrantem, qui duplus erit semicirculi R V G. Convolvatur prædictus sector, itaut in superficiem Conicam abeat D B C, & peripheria B M C B æqualis sit arcui quadrantis G Z; manifestum est, quòd semiperipheria G V R circa conum convolvetur, veluti B S H D, & in D terminabit; notum pariter est, Ichnographiam ejusdem lineæ fore Spiralem, ab Archimedea specie distinctam, quæ (ex Coroll. citat.) spatium comprehendet, quod ad circulum sit, ut 1. ad 2. Quoniam verò loco semicirculi G V R substitui potest quælibet portio, parabolica, hyperbolica, &c. habebimus in earumdem Ichnographiis infinitas Spirales lineas, genere longe diversas, &c. Quæ quidem omnia tibi sat nota coniicio, ex ejusdem Propos. Coroll. 6. nec difficilis tibi erit modus ejusmodi Ichnographias omnes determinandi, quarum tamen constructiones, si quæ ex omnibus magis simplices, & expeditæ videantur, uti & generalem methodum ad ipsarum tangentes ducendas; si communicaveris, rem oppidò gratam, & acceptissimam facturum te scias, &c.*

4 Quid igitur mihi, & olim hoc argumentum, & nunc maximè, tuis excitantibus litteris, rursus speculanti in mentem venerit, candidè aperiam; ut verò etiam geometrica supellectile non ultra mediocritatem instructis, in quorum manus Epistola hæc mea incidere aliquando poterit, manifesta esse possint quæcumque hic inserere placuerit, ea ipsa etiam demonstrabo, quæ apud te demonstratione non indigent, quale est illud, quod tanquam notissimum, & vulgò obvium videris ipse supponere (à quo & initium auspicabor) nempe quomodo Coni recti superficies intelligi possit in planum evolvi, & explicari, aut contrà plana qualibet superficies in

Coni cucullum detorqueri. Esto Coni recti superficies (integra, an dimidia, aut duobus per axem planis intercepta, perinde est) DGC in planum explicanda. Centro D, intervallo DC lateris coni, describatur plani circuli portio DCH; sitque, ut DC ad CA radium basis coni, ita reciprocè angulus GAC inclinationis planorum, superficiem conicam, quæ explicanda occurrit, intercipientium (vel ita 4 anguli recti in superficie integra, seu duo tantùm in dimidia) ad angulum CDH. Dico sectorem CDH esse ipsammet superficiem




conicam DGC in planum evolutam; quia enim arcus eidem angulo subtensi sunt, ut radii, & qui ab eodem radio describuntur, sunt, ut anguli, ideò duorum quorumlibet arcuum proportio erit ex rationibus radiorum, & angulorum composita, quæ si reciprocæ fuerint, ut in casu nostro, rationem dabunt æqualitatis; æqualis est igitur arcus CH ipsi CG; ductis verò ex eodem puncto S radii, seu lateris DC, arcu SI ipsi CH concentrico, & SF in coni superficie, ubi per planum basi parallelum FES secatur; constat, arcum GC ad FS in ea ratione esse, in qua radius AC ad ES (ob communem angulum inclinationis planorum, quibus uterque intercipitur) scilicet, ut CD ad DS, vel, ut arcus CH ad SI;

sunt

sunt autem antecedentes, nempe arcus G C, C H æquales; ergo & consequentes F S, S I æquales erunt; atque ita semper; cùm igitur omnes arcus sectoris C D H æquales sint omnibus, & singulis arcubus superficiei conicæ D C G, illos comparando, qui per idem lateris coni punctum transeunt, iisdem applicati omninò congruent; quare si sector complicari circa conum intelligatur, arcus C H congruet arcui C G; & puncto H in G posito, non poterit non congruere radius D H lateri æquali D G, unde punctum I superponetur ipsi F, & arcus S I congruet eidem S F sibi æquali, totusque sector toti superficiei conicæ respondebit, & circa ipsam convolvetur, sive in ipsam abibit; unde viceversa, conica superficies D G C evoluta, in eumdem sectorem C D H explicabitur.

5 Quòd si linea, conicam superficiem terminans, fuerit, non alterum coni latus, sed curva quælibet G M D, non admodùm diversa constructione intentum obtinebimus, quippe invento, ut priùs, arcu sectoris C H æquali extremo arcui C G datæ superficiei conicæ, ad quodlibet lateris coni punctum S ducto arcu S M in plano basi parallelò, ponatur arcus S V ipsi C H concentricus in eodem plano, æqualis autem arcui S M, facto scilicet angulo S D V in eadem ratione ad M E S, in qua radius S E ad S D (quæ ratio eadem ubique est, nimirum radii basis A C ad latus coni D C) atque ita porrò fiat, quousque compleatur figura D V H, quæ apta nata erit datæ conicæ superficiei D M G congruere, eodemque argumento probabitur esse ejusdem in planum evolutæ figura.

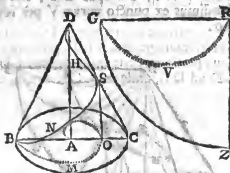
6 Hinc colligitur (descripta curvæ G M D Ichnographia G K A, extensoque latere D M L, juncto radio A L, radio D V O, & arcu K N) fore semper angulum G A C ad C D H, ut M E S, aut K A N ad S D V, & permutando, G A C ad K A N, seu L A C, ut C D H ad S D V, vel C D O, aut arcum G C ad C L, ut H C ad C O; unde evoluta conicæ superficiei sic etiam haberi posset, nimirum, invento priùs sectore C D H, congruente conicæ superficiei C D G, tum arcubus G C, C H similiter divisis in L, & O, junctisque radiis A L, D O, ita hunc secando in V, ut ille ab Ichnographia secatur in K, quousque per puncta D V H transeat linea, deter-

terminans superficiem quæsitam D V H C, est quippe, ut L A ad A K, ita C A ad A N, seu C D ad D S, O D ad D V, existentibus arcubus H C, C O ipsis G C, C L proportionalibus, ut ostendimus ex puncto curvæ V per superiorem modum quæsito.

7 Unde è contrario data figura D V H C circa conū D C B complicanda, ut evadat D M G C, facilè habebimus ejus Ichnographiam, facto priùs angulo G A C ad datum C D H sectoris, datæ figuræ adscripti, ut C D ad C A, sectisque similiter in L, & O arcubus G C, C H, necnon radio A L in K, ut O D dividitur à datæ figuræ perimetro in V: tunc enim punctum K erit in figuræ G K A C, ichnographiā quæsitam determinantis, perimetro. Quæ autem de superficie conica G M D C, seu de ejus evoluta C D V H, respectu Ichnographiæ A K G C dicta sunt, eadem, ut constat, valent de residua coni superficie G M D, ejusve evoluta D V H, respectu ejus Ichnographiæ G K A, quas propterea ex præmissis modis alterutro facilè determinabis, qualescumque fuerint curvæ propositæ; & si linea V H, vel u H recta fuerit, constructionē habebis, ducendi in conica superficie lineam G M, seu G m, omnium data puncta G, M (non in eodem latere, nec in plano basi parallelo posita) conjungentium *Brevissimam*, ejusque Ichnographiam describendi.

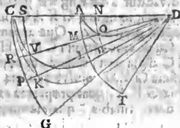
Quo-

Quomodo utcumque satisfactum puto quæstioni, quam moves, determinandi scilicet Ichnographiam figuræ tuæ G V R




circa conum D C B convolutæ, sive illa sit semicirculus, sive parabola, sive hyperbola, aut alterius cujuslibet generis curva extiterit, unde dabuntur infinitæ illæ Spiralium species in his Ichnographiis, quas mente jam comprehendisti. Verùm nescio an operæ pretium sit elegantiorem, quam mox subdo, constructionem illarum attendere.

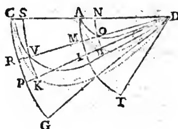
8 Esto figura quælibet in Conum convolvenda, aut ex ipso in planum explicata C V D, & sector illi circumscriptus




(inscriptusve si cava fuerit) D G C; oportet determinare lineam, quæ ejus convolutæ Ichnographiam clauderet in basi coni dati radii D A, qui minor sit radio sectoris D C. Fiat

 su-

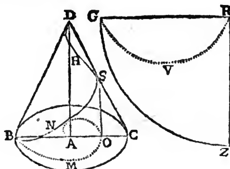
ſuper D A figura A O D ſimilis, & ſimiliter poſita ipſi datæ C V D (ſecto nimirum quovis ramo D V in O proportionaliter, ac ſecetur C D in A, & per puncta A O D ducta linea) & centro D ducto quovis arcu N O H, fiat ſemper H N ad N O in conſtanti ratione lateris coni C D ad radium baſis D A; ajo, puncta H ad Ichnographiã A H D, propoſitæ curvæ C V D reſpondentem, pertinere; erit enim angulus L D A ad R D C, ut radius C D ad D A, unde arcus C R æqualis erit arcui A L;




quando igitur ſector C G D, cum inſcripta figura C V D, convolvetur circa conum baſis A D T, arcu C G congruente ejuſdem baſis arcui ſibi æquali A T, portio C R congruet ipſi A L, & latus D R, cum puncto V curvæ C V D, per quod tranſit, erit ſuperimpendens radio D L, in quo propterea erit punctum ichnographicè ſubjectum puncto V dictæ curvæ; debet autem in eadem ratione diſtare punctum ichnographiæ à centro baſis D, reſpectu radii D L, in quo reperitur, ac diſtet punctum V in latere coni D R à vertice D (ob ſimilia triangula effecta à perpendiculo, ex punctis curvæ in ſuperficie conica exiſtentis ad baſis Ichnographiam demiſſo, qua ratione in præcedenti figura eſt C A ad A O, ut C D ad D S) itaque cùm ſit, ut latus D C ad radium baſis D A, ſeu D L, ita V D, diſtantia puncti V in ſuperficie conica à vertice D, ad D O, ſeu D H, diſtantiam puncti H à centro baſis, erit punctum H, & alia omnia ſimili modo determinata, ad curvam ichnographiæ, quæ quærebatur.

9 E con-

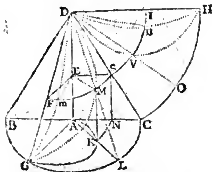
9 E converso, data ichnographia, lineam ipsi in cono respondentem in plano determinabimus; sit enim talis Ichnographia A H D, & radio D A extenso in C, ut D C æqualis fiat lateri coni propositi, super ipsa fiat figura C K D similis, ac similiter posita datæ A H D; & ducto ex centro D quolibet arcu S K, ita dividatur in V, ut sit K S ad S V, ut latus coni C D ad radiũ basis D A; erit punctum V in linea C V D quæsita, quæ in superficie conica impendet datæ ichnographiæ A H D; nam recalcatis præcedentis demonstrationis vestigiis, ostendentur arcus C R, L A æquales, unde applicati congruent, & punctum V superimpendebit ipsi H, quippe tantumdem in latere D R proportionaliter à vertice distans, quantùm H in radio à centro D; Vnde facillima habetur constructio, nedum Ichnographiæ in tua figura, ubi




G V R convolvenda supponatur semicirculus (alio enim semicirculo super radio basis facto, & in arcus concentricos basi resoluta, oportet singulorum arcuum dicto semicirculo comprehensorum quadruplos determinare, & per eorum extrema curvam ducere, erit enim coni latus radii basis quadruplum, uti quatuor anguli recti quadrupli sunt unius subtensi à quadrante G R Z) sed & ubi supponatur parabola, aut hyperbola [ facta nimirum simili constructione, & ex concentricis peripheriis tali parte determinata, quæ ad arcum, radio, & simili parabola, aut hyperbola super ipsum descripta conclu-

ſum, ſit ſemper in data ratione lateris coni ad radium baſis) At è contra ſi cupias Ichnographiam circularem, parabolicam, alteriuſve figuræ habere, manifeſta erit, conſtructio figuræ, quæ cono advoluta ejuſmodi Ichnographiam dare nata eſſet, per ſectionem arcuum concentricorum, peripheria ſimilis figuræ ſuper latere coni deſcriptæ, ipſoque coni latere comprehenſorum, in eadem ratione data, lateris coni ad radium baſis. En quanta curvarum ſeges, quas geometricè determinare poſſumus, quotieſcumque data ratio, lateris coni ad radium baſis, poteſt geometricè angulis applicari, vel per multiplicationem, vel per diviſionem arcuum propoſitorum.

10 Hinc in meo Sphærocylindricarum, & Conocylindricarum ſectionum Tractatu oſtendi, quòd, ſi conus B D C ſecari intelligatur ſemicylindro, cujus baſis ſemicirculus G K A




ſuper radio baſis A G deſcriptus, ſitque latus coni duplum verbi cauſa radii baſis, ſeu in quavis alia ad ipſum ratione, facto ſuper D H, æquali lateri coni, ſemicirculo pariter D V H, omnibuſque arcubus V I, centro D deſcriptis, bifariam, ſeu in data ratione ſectis ad puncta u, itaut ſit V I ad u I, ut D C ad C A, linea D u H, per puncta u ſic inventa tranſiens, erit æqualis cono-cylindricæ ſectioni; id quod etiam ſuccedet,

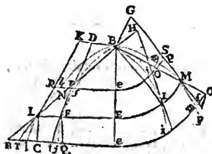
det, si loco semicirculorum G K A, H V D, ponantur quævis aliæ similes figuræ, semper enim communis conicæ, & cylindricæ superficiei sectio in lineam planam illi æqualem commutabitur; cùmque in Vivianeis *pag.* 122. paulò ante *num.* 37. ostenderim, lineam quoque Sphærocylindricam, seu perimetrũ Veli Florentini, esse communem conicæ, & cylindricæ superficiei sectionem, quam etiam *num.* 41. *p.* 136. ostendi æqualem perimetro cujusdam ellipsis, ideò etiam curva D u H, modo præscripto efformata, cuidam ellipsis circumferentiæ æqualis ostendetur. Vides autem, opinor, quàm utile sit eamdem lineam ex variis superficiebus in alias transferre, diversisq; constructionibus in plano determinare, prout eadem linea elliptica, tum modo superiùs descripto, tum per modum ungulæ ex cylindro expansæ, tum vulgari modo, prout Apollonianam coni sectionem terminat, aliisq; modis in plano jacere potest, semperque diversas tangentium determinationes suscipit, pro vario suarum partium situ; contingere siquidem potest, ut in uno rectificationem respuens, in altero illam admittat, vel saltem cum alia nota linea comparationem suscipiat. Sic, si proponatur linea L O O, cujus hæc proprietas, ut ducto radio F O ex determinato puncto F, secante arcum L G, ejusq; tangentem L E in punctis G, E, sit semper post F G radiũ, & secantem F E, tertia proportionalis F O, facile erit curvam L O O cum linea Geometris jam satis nota comparare, videlicet cum parabola notæ parametri; siquidem illa ipsa non alia est, quàm parabola evoluta ex superficie coni, cujus triangulum per axem sit æquilaterum; id quod extra hanc methodum, nescio an satis promptum esset conjectura assequi, nedum facili geometrica constructione determinare.

11 Jam, quando ita provocas, operæ pretium eſt, ut curvarum, eo, quem præmiſi, modo deſcriptarum, tangentes univerſali methodo determinare aggrediar, pro quo: aſſumatur quælibet figura A L L B, ductiſque ex centro A quibuſvis concentricis arcubus E L, E L, ſimiliter augeantur producti in M,

aut minuantur diviſi in I, quouſq; per puncta A M M B tranſeat curva, qualem *num.* 8. determinavimus, aut per puncta A I I B tranſeat curva, qualem *num.* 9. deſcripſimus; quæraturque ad datum punctum M, vel I curvarum ejuſmodi tangens. Ducto arcu quolibet, verbigratia extremo B C D, occurrente junctæ chordæ, ſeu radio A M, A I in D, H, ductoque arcu M L, ſeu I L, & juncta chorda A L, ſecante priorem arcum in C, ducantur tangentes arcus D B ad puncta D, H, C, quæ ſint D G, H F, C K; huic ultimæ occurrat in K tangens L K ducta ex puncto L datæ figuræ A L B; in ea autem ratione, in qua ſunt arcus L E ad E M, aut E I, ponatur eſſe data portio tangentis C K ad D G, vel H F. Dico junctam G M, aut F I eſſe tangentem ejuſmodi curvarum in M, I. Si enim hæ curvæ gigni intelligantur ex æquabili motu lineæ A B circa A circulariter converſæ, & motu accelerato, vel retardato, prout opus fuerit, puncti B per B A aſcendentis, aut A per A B deſcendentis (ad modum, quo Spirales generari ſolent) manifeſtum eſt, æquabilem illam velocitatem motus circularis in curva B M A tantò majorem, & in B I A tantò minorem fore, quàm ſit in curva B L A, quantò major eſt arcus M E, & minor E I, quàm E L, ideſt ex constructio-

ne,

ne, quantò major est GD, & minor HF, quàm CK, eodem existente impetu puncti difformiter fluentis, sive in M, sive I, sive in L, propter æqualitatem ipsarum AM, AI, AL, vel residuarum DM, HI, CL, quas mobile punctum A, vel B intereà peregit, dum linea circulariter mota respectivè arcum DB, HB, vel CB emensa est. Si igitur velocitas difformis in puncto L curvæ BLA exprimatur per LC, etiam eadem velocitas in punctis M, I aliarum curvarum exprimetur per MD, IH illi æquales, & si velocitas æquabilis circularis motus exprimatur per CK ad curvam ALB (exprimenda verò est prorsus per ipsam, quoniam in ea est motus circularis directio, quippe tangens arcus CB, & aliunde intercipitur à tangente LK, angulo recto KCL opposita, in qua utriusque motus composita directio reperiri debet, ex 8. Prop. l. 2. Geometriæ motus Joannis Cevæ, qui non cognatione tantum, sed & geometrico acumine, & inveniēdi fœlicitate Tibi verè Germanus existit) similis æquabilis velocitas ad curvam AMB exprimetur per DG, & ad curvam AIB per HF; propterea juncta GM, & FI tangens erit, sive ex eadem propositione, sive ex his, quæ *cap.* 5. *num.* 3. demonstravi in Hugenianis, & antequàm Fratris tui Geometriam legerem, ex Torricellii loco ibidem citato deduxeram. Atque hinc est, quòd

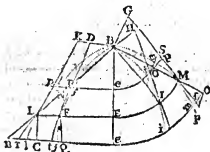



si ordinatæ ad axem non sint arcus cōcentrici, sed rectæ lineæ, velut LE, FE in eadem semper ratione, ductis LC, FQ

axi

axi parallelis, dataque figuræ B L tangente L r, occurrente basi in r; sumpta Q t, quæ sit ad C r in eadem ordinatarum ratione, juncta t F tanget curvam F B; tum enim illæ ordinatæ L E, F E, quemadmodùm & basis recta C Q e, habendæ sunt pro arcubus concentricis, à centro infinitè distante descriptis, cujus radii propterea sint ipsæ axi parallelæ L C, Q F, ipsæque r C, t Q pro tangentibus extremi circuli C Q e, ob infinitam ejus radii magnitudinem, in unam eamdemque rectam cum suis tangentibus abeuntis; cujus constructionis veritas jam aliunde innotuit, siquidem r L, t F hoc modo designatæ in unum & idem axis B E punctum collimabunt, uti ex proprietate triangulorum constat.

12 Quòd si quis malit independenter à motuum compositione easdem tangentes evidentiori methodo inquirere, per




me licet. Esto enim primùm duplex figura, altera ex rectis L E, l e ad axem ordinatis, altera ex arcubus E M, e m ad eumdem axem applicatis, & respectivè æqualibus ipsis L E, l e sibi correspondentibus; data tangente L K prioris figuræ, occurrente ipsi B K, ex vertice ductæ æquidistanter ad ordinatas, in puncto K, tangens figuræ posterioris ad punctum M sic determinabitur; juncto radio B M, atque huic ex B perpendiculari B G, æquali ipsi B K, jungatur G M: dico hanc esse tangentem; occurrat enim in S cuilibet alteri ex arcubus concentricis e m; secanti radium in O; sitque O P radio B M

ex

ex O perpendicularis, ac juncta chorda B L, ordinetur per idem axis punctum e applicata prioris curvæ e T, secans tangentem in R, chordam in N; erit utique arcus e O æqualis e N, eò quòd sector sit triangulo analogus; sed & e m æqualis e l; itaq; & O m æqualis N l; ipsa verò N R æqualis O P, quia ad B K, æqualem ipsi B G, est in eadem ratione, L N ad L B, seu E e ad E B, aut O M ad M B; quæ omnia valent etiam de homologis lineis per minusculas litteras designatis, & infra punctum E ductis; hoc solo discrimine, quòd si e sit supra E, erit N R major, quàm N l; unde & O P major, quàm O m; multò igitur magis arcus O S (qui est major ipsa O P, à fortiori quàm major sit suo sinu) erit major, quàm O m; unde punctum S erit extra curvam; si verò e acceptum fuerit infra E, erit n r minor, quàm n l; unde & o p minor, quàm o m; arcus autem s o minor est tangente o p, à fortiori, quàm sua tangente minor sit arcus, quem ex centro B, juncta B p interciperet: multò ergo minor est arcu o m; & ideò etiam punctum s extra curvam erit; recta igitur G M tangit. Jam verò concipiatur alia curva B F priori analoga, itaut ejus ordinatæ F E ad ordinatas prioris L E perpetuò sint in eadem ratione, utiq; facta D B ad B K, ut F E ad E L, juncta D F hanc curvam tanget; siquidem si occurrat alteri ordinatæ in puncto T erit etiam T e ad e R, ut F E ad E L, nempe ut f e ad e l; quare cùm e R major sit ipsa e l, etiam e T major erit, quàm e f; si igitur intelligatur figura B i I ex arcubus E I æqualibus ordinatis hujus postremæ figuræ E F, juncto radio B I, atque huic perpendiculari B H, æquali ipsi B D, juncta H I tanget; eritque H B ad B G, ut I E ad M E. Duarum igitur figurarum, ex concentricis arcubus in eadem constanti ratione positis descriptarum, tangentes intercipiūt rectas ad radium perpendiculariter ductas, ipsis arcubus proportionales: Quod coincidit cum præmissa constructione.

13 Antequàm autem hinc aliò digrediar, adnotare juvabit, ex harum pariter curvarum descriptione doctrinam illam meā secundæ Appendicis ad Vivianea Problemata iterum demonstrari, seu denuò confirmari posse. Hinc siquidem deducitur, Ichnographiam cujusvis portionis ex conica superficie absum-

ptæ, qualis eſſet A H D, eſſe mediam proportionalem inter ipſam figuram conicæ ſuperficiei in planum expanſam, veluti D V C, & aliam ipſi ſimilem, ſimiliterque poſitam D O A, ſuper radio baſis coni deſcriptam; nam propter ſingulos arcus H N, ſe habentes ad N O in conſtanti ratione lateris coni C D ad radium baſis A D, erit tota figura A H D ad A O D,

ut C D ad D A; ſed C V D ad A O D ſibi ſimilem eſt, ut quadratum C D ad quadratum D A; itaq; C V D ad A O D eſt in duplicata ratione A H D ad A O D, propterea & conica ſuperficies C V D ad Ichnographiam ſuam A H D eſt, ut A H D ad A O D, ſive, ut latus coni C D ad radium baſis D A. Quod &c.

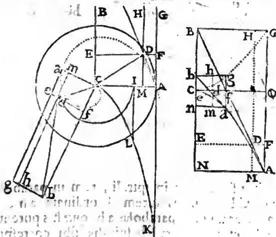
14 Tu verò non hic ſubſiſtis, & alias rurſus novarum ſpeculationum fodinas eruere aggreſſus, Epiſtolis Tuis, pridie kal. Julii ad me datis, nova iterum ratione lineas in conica ſuperficie deſcriptas in planum ſternere niteris. Ais enim:

*Speculationem inſtituere placuit circa Spiralem illam conicam, de qua ſuperioris hebdomadæ Tabellario ad Te ſcriptas Epiſtolas tradidi, cujus Ichnographia integra eſt Spiralis Archimedea; conſiderabam ſcilicet cylindricam ſuperficiem, quam illæ perpendiculares efformant, quibus ſuffulta, ut ita dicam, diſtenditur prædicta Spiralis conica; ſcire autem optabam, in quam lineam evaderet, explicata in rectam lineam Spirali Archimedea, una cum ipſa ſuperficie cylindrica, ad conicam ſpiralem lineam terminante. Si enim hæc curvam aliquam è lineis aliàs notis referret,*

*ver-*

*verbi gratia parabolam, id egregiarum certè Speculationum fodinam aperiret, &c.*

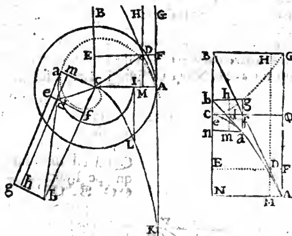
15 Id ego primo statim intuitu ad hyperbolæ quadraturam pertinere opinatus sum, nec me fefellit opinio, siquidem ad illam referri jam tum videbatur parabolicæ curvæ rectificatio, uti ex Hugenianis *cap.* 12. *num.* 14. constat, parabolæ autem rectificationem cum Spiralis Archimedeæ distensione conjunctam esse, tum ab aliis animadverteram ostensum esse, tum ipse postmodum docuisti ab Joanne Ceva fratre tuo Geometr. mot. l. 2. prop. 14. idem demonstrari. Anteà verò id mihi innotuerat hoc ratiocinio. Esto Spiralis Archimedea C a A primæ circulationis, & posito in altera figura Parabolæ Apollonianæ axe C N æquali dimidio circumferentiæ A D A,




ordinata autem N A æquali radio C A, describatur parabola C a A. Dico hanc Spirali æqualem esse; sumpto enim quolibet in parabola puncto a, & ordinata a n; & in spirali puncto a, cujus radius a c sit æqualis ordinatæ a n, ducatur arcus a l; ducanturque tam in parabola, quàm in spirali tangentes a b, occurrentes ipsi c b (perpendiculari hinc ad radium c a, illinc

 ad

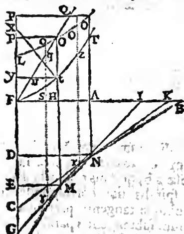
ad ordinatam an) in punctis b, b. Jam: cùm sit Cb in spirali æqualis arcui al (ut docuimus in Hugenianis *cap.5. nu.9.*) Sit autem peripheria ADA ad arcum la in duplicata ratione AC ad Ca, seu (in parabola) AN ad na, videlicet, ut NC ad Cn; sitque CN æqualis semissi peripheriæ ADA, erit & Cn æqualis semissi arcus al, vel subtangentis Cb spiralis; sed & subtangentis nb parabolæ subdupla est eadem Cn;




æquales igitur sunt, tum in spirali, tum in parabola subtangentes nb, Cb; æquales autem & ordinata an, & radius Ca; tota igitur tangens parabolæ ab, quæ his potentia æquatur, æqualis erit tangenti ab spiralis sibi correspondenti; sumptaque infinitè exigua utrobique tangentis particula ad, ac dimissa in ordinatam, & radium subtangentis parallela dm, erunt triangula dma, dma utrobique similiter æqualia, applicatisque alterius ad alteram homologis triangulorum amd lateribus, tangentes ad, seu curvarum partes his respondentes congruent, certè eò res deducetur, ut alterius ad alteram proportio sit propior æqualitati, quàm quælibet data majoris, aut minoris inæqualitatis ratio; æquales igitur sunt, tum Archi-

chimedea Spiralis, tum parabola quadratica nuper designata.

16 Hinc patet, quàm justò minorem Spiralem fecerint, qui semicircumferentiæ A D A æqualem esse asseruerunt, utì Sturmius Math. Enucl. l. 2. cap. 4. consect. 2. proposit. 17. Guarinus tract. 18. Eucl. Adaucti prop. 13. Rinaldinus de resol. & compos. pag. 299. aliique; videlicet tantò minorem, quantò axis N C parabolæ C a A minor est ipsa curva C a A; constat item à scopo non leviter aberrasse Virum Clarissimum Borellium, ubi de motu animal. p. 2. prop. 41. duas ejusdem Spiralis revolutiones comparans, ait illas ad invicem esse, ut peripheriæ mediæ arithmeticæ inter extremas cujuslibet Spiralis, sive esse ad invicem, ut sunt circulares zonæ, quibus inscribuntur; hoc enim perinde est, ac si diceret, curvam parabolicam t z esse ad t S (lineis æquali intervallo distantibus, axi parallelis interceptas) ducta recta F O secante præfatas parallelas in q, Q, ut trapezium Q s H O ad O H S q, Quod est absurdum, sumptis quippe hyperbolicis spatiis O O s H, O H S O (iisdem curvæ portionibus correspõdentibus per *cap.* 12. *num.* 14. Hugenianorum) & permutando, esset Q s H O ad inscriptũ O O S H, ut O H S q ad circumscriptum O H S O, ideft ratio majoris inæqualitatis æqualis foret rationi inæqualitatis minoris.

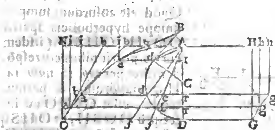



* *Hic pariter deficit littera* s *inter* H, *&* A.

Cæterùm eo modo, quo parabolam quadraticam, atque Archimedeam Spiralem comparavi, similiter alias spiralium species cum aliis parabolarum speciebus posse conferri manifestum est, uti aliàs, si satis memini, indicabam; nempe si radio-

diorum cujuscumq; helicis potestates denominatæ ab exponente $x$ sint inter se, ut angulorum, seu arcuum à radiis interceptorum potestates denominatæ ab exponente $y$, facta parabola talis naturæ, ut abscissarum quarumvis potestates denominatæ ab exponente $y$ sint, ut potestates suarũ ordinatarum denominatæ ab aggregato exponentium $y + x$, spirali propositæ ita respondebit, ut si ultima ejus ordinatarũ æquetur radio dictæ spiralis, axis autem sit $\frac{x}{y+x}$ totius circumferentiæ, illa Curva Parabolica, & ejusmodi Spiralis æquales erunt, ut ex methodo tangentium, tam parabolarum, quàm spiralium; *cap.* 5. *num.* 4. & 8. Hugenianorum tradita facilè constat.

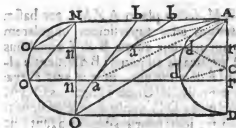
17 Sed curvarum dimensionem tractantes quid vetat aliò paulatim digredi, quousque modum Cycloidem rectificandi tibi communicem, quem tibi acceptissimum fore video, quippe his geometricis venustatibus delectaris? En illum: esto Cyclois A a O, ordinatæ a r, a r, secantes semicirculum ge-



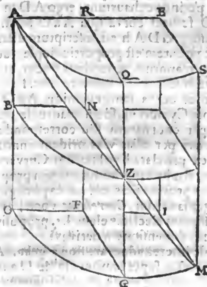

nitorem in d, d; extendantur chordæ A d, A d in f, f usque ad basim, applicenturque r g, r g his ipsis A f, A f æquales, ut oriatur hinc curva G g g, quæ erit Hyperbola secundi gradus, sive, ut Cl. Viviano aliquando appellare placuit, *Mesolabica*, propter f A ad A d, seu D A ad A r, ut quadratũ A f ad quadratum A D, sive quadratum r g ad D G. Jam sic: ducta a b Cycloidis tangens quantumvis parva, & duabus prædictis ordinatis quantumvis proximis intercepta, erit utique parallela ipsi A f, ex dictis in Hugenianis *cap.* 8. *num.* 7. erit ergo a b ad intervallum ordinatarum r r, ut A f, seu r g ad dia-

diametrum A D; & hoc semper; rectangulū igitur g r r æquale erit rectangulo ex A D in a b; & omnia rectangula g r r, exhaurientia spatium infinitum g G D A h, æqualia rectangulo ex A D in curvam semi-cycloidis A a O, quam innumeræ tāgentes a b perinde exhauriunt; ergo A D in A a O ad quadr. ejusdem A D, scilicet curva ipsa A a O ad diametrum A D, est ut spatium g G D A h ad inscriptum diametri quadratum G D A H; hæc autem est proportio dupla, ut ipse *cap.* 8. *numer*. 11. Hugenianorum generaliter docui, atque ipsemet frater tuus supra laudatus in Geometr. mot. l. 1. prop. 12. pridem ostendit; itaque curva semi-cycloidis A a O dupla erit diametri, & tota Cyclois ejusdem quadrupla, quin & partes singulæ A a duplæ chordarum sibi correspondentium a d, uti aliis Geometris per alias vias pridem innotuit, Hugenio præsertim, ex præclara Evolutarum Curvarum inventione. Est verò generalis hæc methodus, si rem propiùs aspicias, atque ad omnes prorsus illas curvas exporrigitur, quas *cap.* 8. *num.* 5. Hugenianorum, *Correlatas* voco, ex quibus scilicet, per simplicissimam Euclidis elem. l. 1. proposit. 43. innumerarum figurarum dimensionem derivavi.

18 Duo hìc intereà adnotare non pigeat. Alterum, quòd si cylindricus erectus super semi-cycloide O a A D secari intelligatur plano quomodolibet inclinato, transeunte per basim O D, semper abscissa superficies ungularis in planū explicata in parabolam notam abibit; siquidem chordæ circuli A d, ad respectiva puncta r diametri A D applicatæ, parabolam efficiunt, ergo & earum duplæ, nēpe portiones curvæ cycloidalis a A, ad eadem diametri puncta, vel ad proportionales partes altitudinis illius ungulæ, applicatæ, parabolam item conficient; sed omnis superficies ungu-



gularis conflatur ex fimilibus curvæ portionibus applicatis ad partes, altitudinis proportionales partibus diametri bafis, utì conftat ex hac figura, ubi AQSEIMGO fit cylindricus




fuper quavis curva IOGM, fectus plano AZMI, per bafim MI tranfeunte, manifeftum eft, fuperficiem ungularem AZMGO conflari ex portionibus curvæ BZ (æqualibus abfciffis à vertice OG) applicatis ad puncta B dividentia altitudinem ungulæ AO in eadem ratione, in qua axis curvæ OI fecatur in F per applicatam GF: Unde fi fingamus OGM effe Cicloidem, cujus portiones OG duplæ funt chordarum femicirculi fibi refpondentis, ideft quarum quadrata funt, ut axis abfciffæ OF, manifeftum erit, Ungulam Cycloidalem AZMO effe parabolam, quia quadratum curvæ OGM erit ad quadratum curvæ BZ æqualis ipfi OG, ut OI ad OF, feu BN, ideft, ut altitudo OA ad AB, ac perimeter AZM erit æqualis curvæ parabolicæ, imò in parabolam étiam pofitione

ta-

talem abibit, rectificatis curvis O M, B Z per explicationem ungulæ in planam superficiem, & è contra reliqua superficies A Z M S in trilineum parabolicum extendetur; quo statim constat (ob proportionalitatem Ungularum, tum superficialium, tum solidarum, cum superficiebus, aut molibus rotundorum corporum ab eadem figura) superficiem rotundam ex Cycloide circa basim, duplam esse rotundæ superficiei ab eadem circa tangentem verticis conversa; necnon distantiam centri gravitatis curvæ cycloidalis à basi duplam esse distantiæ ejusdem à vertice, &c. facilèque hinc habetur dimensio utriusque ex illis rotundis superficiebus, ob notam curvæ longitudinem, & centri gravitatis distantiam, juxta regulam celeberrimam Guldini Vestri circa genesim rotundorum.

19 Alterum, quod notari attentiùs velim, inde nullo negotio consequitur, nempe, data qualibet plana superficie, quæ à curva qualibet linea definiatur, posse nos ejusmodi superficiem ita curvare, seu tali cylindrico circumvolvere, ut eadem curva linea nihilominus in uno plano jaceat (quemadmodùm in casu prædicto, curva parabolica A Z M ita advolvitur cylindro cycloidali, ut nihilominus in uno, eodemque plano A I M, cylindrum secante, jaceat) seu cylindrum invenire, ex cujus sectione, eadem curva in superficiem ungularem convoluta efformetur. Propositum siquidem obtinebimus, alteram superficiem I O G M ita efformando, ut quæ fuerat in data figura relatio ordinatarũ ad axem, eadẽ sit curvæ portionũ O M, O G pariter ad axẽ suum (ut in exemplo nostro, quæ est in cycloide portionũ curvæ à vertice abscissarũ ad axis sui partes ordinatis abscissas) enimverò super ejusmodi curva sic inventa erecto cylindrico, ipsi advolvetur data figura, & suæ perimetri partes in eodem plano, ad datæ figuræ altitudinem ipsummet cylindrum transversim secante, dispositas habebit, semper autem tangens figuræ quæsitæ O G M ad punctum G, intercepta eodem puncto, & ordinata per verticem O, erit = subtangenti datæ figuræ A Z M, idest interceptæ inter punctũ Q, & occursum tangentis puncti Z (explicato parallelogrammo A S M O cum sua curva A Z M) ut in exemplo cycloidis, cjus tangens subdupla est curvæ O G, quemadmodũ ipsius A Q

ſubdupla foret ſubtangens parabolæ explicatæ; id quod aliàs generaliter monuimus *cap. 5. num.* 2. & facillimè demonſtratur ex dictis *cap.* 13. *num.* 5.

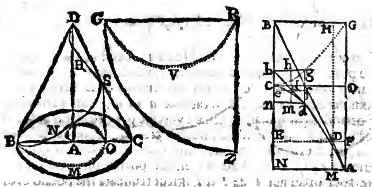
Exemplum aliud ſe ſe obvium præbet in ipſa Logiſtica, ſeu Logarithmica, quam ſi velis ex aliquo cylindro ſecare, aut cylindrum invenire, cui advolvatur, ita ut curva nihilominus in uno plano jaceat, id elegantiſſimè obtinebis per cylindrum ſuper Tractoria erectum, quandoquidem relatio ordinatarum Logiſticæ ad axem mutatur in relationem earumdē ad curvam in Tractoria, uti oſtendimus *cap. 5. cit. nu.* 2. Concipiatur verbi gratia in plano horizontali D F B erecta ad punctum B haſta quædam ſolidiori baſi marmoreæ B infixa; mox alligata baſi catenula aliqua F B, longitudine æquali parametro, ſeu ſubtangenti datæ Logiſticæ, ejus extremum F trahatur per rectam F D; utique baſis catenulam ſequens deſcribet Tractoriam curvam B N M, & haſta baſi infixa curvam quamdā ſuperficiem cylindricam ſuper ipſa Tractoria erectam; hæc igitur ſecari intelligatur plano aliquo per axē Tractoriæ F D tranſeunte, ad altitudinem extremæ ordinatæ in Logiſtica propoſita, dico ſuperficiem ungularem inde abſciſſam fore nil aliud, quàm ipſammet Logiſticam tali cylindro advolutam; quippe ſi plani inclinatio fuerit per 45. gradus, itaut Logiſticæ ordinata æquetur ſubtangenti ejuſdem, ſeu erecta in ungula illa cylindrica ad punctum B adæquet catenulā B F, conſtat, omnes erectas ad puncta N, M æquales fore ordinatis Tractoriæ N P, unde qualis eſt relatio ipſarum ad curvam B N, talis erit relatio applicatarum illius ungulæ ad ſuum axem, qui illi curvæ B N congruere intelligitur, & explicata illa ſuperficie in planum B S S, utriuſq; ordinatis B F, & axe F D coincidentibus, erit quælibet axi Logiſti-

fticæ parallela A S æqualis curvæ B N Tractoriæ per dicta *cap.* 13. Hugenianorum *num.* 5. Possem & modum inserere, quo figura quælibet ita complicari in cylindrum posset, ut ejus curva ad conicam superficiem terminaret; sed ne longiùs digrediar.

20 Jam ad institutum redeo, & cylindricam illam superficiem super spirali erectam, ac cono interclusam contemplor; utique perpendiculares O S super helicis punctis erectæ, & ad coni superficiem terminatæ, proportionantur differentiis radiorum, est enim D A ad O S, ut C A, seu A B ad C O;

itaque exposita parabola C a A hanc spiralem B O A æquante, si ad singula puncta a peripheriæ parabolicæ erigi intelligantur æquales differentiis ordinatarum (ubi angulus D C A, trianguli per axem coni semirectus fuerit) iisve proportionales in ratione axis coni D A ad basis radium A C (ubi ille angulus major, aut minor fuerit semirecto) seu si cylindrica superficies super C a A perimetro parabolæ erecta secari intelligatur plano per A Φ transeunte, ac tantumdem basi inclinato, ac latus coni radio basis inclinetur, scilicet per angulum D C A, quomodo erectæ manebunt in superficie cylindrica quæsitæ ordinatarum differentiis (adeòque & differentiis æqualium radiorum circuli A C) proportionales, quippe correspondentes applicatis trilinei parabolici C a A Φ, erit un-

gula ex tali superficie cylindrica, basi, & plano secante interjecta eadem prorsus, quæ super spirali A O B priùs erigebatur, & cono conclusa manebat; Perimeter autem ungulæ cylindri parabolici est parabolæ æqualis, uti constare potest ex propos. 3. Append. nostræ Vivian. Probl. itaque explicata in rectam spirali B O A, curva B S H D, non quidem in parabolam, quæ talis positione sit, sed in ungulæ parabolicæ perimetrum abitura est, æqualem longitudine cuidam parabolæ, cujus rectum latus sit ad latus rectum prioris C a A, ut lateris coni D C quadratum ad quadratum radii A C, axis longitudine ipsi C N æquali remanente; id quod etiam immediatiùs,




& absque tot ambagibus colligitur, ex quò ipse demonstraveris curvam B S H D esse spiralem conicam, quæ evoluta in Archimedeam spiralem abeat, per superiùs dicta *num.* 15. utique ejusmodi parabolæ æqualem.

21 Dimensio autē ipsius superficiei cylindricæ D H S B O A habebitur, ex rectangulo axis A D in ipsam spiralem A O B, vel huic æqualem parabolam C a A, subtrahendo tale spatium, quod ad portionem ejusdem parabolæ, duabus ad axem ordinatis interceptam, quarum altera ex foco, altera tantò infra ipsum, quantus est totus axis, sit in ratione axis D A ad radiū A C; residuum quippe erit spatium ungulæ suprà determinatæ; id quod analyticè sic describi potest. Radius A C sit = $r$, & $\frac{1}{4}$ ba-

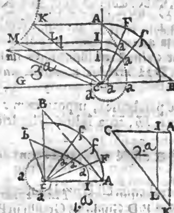
baſis quadraticis inſcribendæ quadranti circulari radii A C (vel ſemiſſis lateris recti parabolæ C a N; ideſt tertiæ proportionalis poſt ſemiperipheriam, & radium) ſit $= c$; quæ verò utriuſque poteſt quadratum (quæ ſcilicet foret parabolæ perpendicularis in A) eſto $= u$; axis coni A D eſto $= a$; ſuperficies hyperbolæ æquilateræ interceptæ ſemitranſverſo æquali ipſi $c$, & ordinata ad rectæ diametri portionem æqualem ipſi $r$, eſto $bb$. Erit cylindrica ſuperficies ſpirali imminens, & cono concluſa ADHSBOA $= \frac{abb}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r}$; nam linea ſpiralis, ſeu parabolica, utpote cum $c$ continens rectangulum $= bb$, erit $\frac{bb}{c}$, tota igitur cylindrica ſuperficies ſpirali imminens, & uſque ad apicem coni completa, erit $\frac{abb}{c}$

Verùm inde ſubtrahenda eſt Ungula ſuperior, cujus ſpatium, ad portionem parabolæ interceptam ordinatis, $c$ ex foco, & $u$ tantò longiùs ab ipſo, quanta eſt ſemiſſis circumferentiæ, ſeu axis datæ parabolæ, ſit in ratione $a$ ad $r$; cùm verò integræ portiones parabolæ, abſciſſæ à vertice per ordinatas $u$, & $c$ ſint, ut $u^3$ ad $c^3$; dividendo, portio truncata intercepta ordinatis, $u$, $c$ erit ad portionem interjectam vertici, & minori ordinata $c$, ut $u^3 - c^3$ ad $c^3$; eſtque portio interjecta vertici, & foci ordinata $c = \frac{1}{3} cc$; igitur truncata illa portio ordinatis $c$, & $u$ intercepta erit $\frac{u^3}{3c} - \frac{cc}{3}$; & quæ ad hanc eſt in ratione $a$ ad $r$ erit $\frac{au^3}{3rc} - \frac{acc}{3r}$; qua ſubtracta ex $\frac{abb}{c}$ fit $\frac{abb}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r}$ $=$ cylindricæ illi portionis ſpiraceæ BSHDAOB cono incluſæ.

22 Nihil, ut arbitror, attinet contemplationem ulteriùs extendere, quum omnia ipſe mentis excurſu jam præoccupaveris, ſed ſi optaris ejuſmodi ſpiraceæ cylindricæ ſuperficiei portionem, qua explicata in planum, rectificata perimetro BOA, etiam BSHD in rectam abeat, ſume ſpiralem Geo-

me-

metricam A a C; nam & in coni superficie similem spiralem habebis (uti eodē tuo ratiocinio constat) quæ potentia æqualis erit ipsi C a A, & axi coni super illa perpendiculariter erecti,




propter radios A C, a C proportionales curvæ portionibus C a A, C a a ab ipso centro abscissis, ut colligitur ex dictis *cap.* 5. Hugenianorum *num.* 10. adeòque & differentias radiorum F a, f a curvæ portionibus A a respondentes.

Hæc habui, quæ raptim ad Te scriberem Vir Clariss. & quæ Tuis elegantissimis speculationibus reponerem; de controversia autem Mechanica, quæ hactenus nos commisit, erit aliàs differendi locus, esto enim utilior sit Statica illa dissertatio, jucundior tamen, minùsque in lubrico posita, Geometricarum rerum sedula meditatio. Vale, méque, ut facis, amare perge; quamquàm, non est cur de hoc sim sollicitus, insitæ enim Humanitatis tuæ stimulos habes, quibus in id incitaris. Dabam Kal. Aug. &c.

# APPROBATIONES.

LIbrum, cui titulus est, *Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum*, elaboratum ab Adm. Rev. & Excell. P. D. Guidone Grandi Monacho Camald. Matheseos Professore, & in Almo Pisarum Collegio Philosophiæ publico Lectore, de mandato Reverendiss. P. Generalis attentè perlegi: Et cùm nihil in eo reperiatur, quod Catholicæ Fidei, bonisque moribus adversetur, existimo posse Typis mandari: imò ut mandetur, debita Matheseos Amatoribus, ipsisque mathematicis disciplinis, justitia exigit. Petunt enim istæ, quæ (licèt magna ex parte nova) sua tamen sunt, ac pleno jure ad ipsas pertinent. Exigit etiam Religionis decor, ut Auctoris ingenium, & inveniendi fecunditas magis per Orbem patefiat, ne sibi debita laude fraudetur. Ita,&c.D.Martinus Angelus Franchi Monachus ejusdem Congreg. S.T Mag. & in Monasterio Angelorum Florentiæ Prior. Dat. Florentiæ ex d. Monasterio hac die 16. Julii 1701.

IN Geometrica Demonstratione Theorematum Hugenianorum Adm. Rev.& Exc. P.D.Guidonis Grandi in Pisano Atheneo Publici Phil.Profess.& S.Th.Mag. quem jussu Reverendiss.P.Gener. Ordinis nostri diligenter expendi, nihil occurrit, quod S. Fidei Catholicæ,bonisve moribus adversetur,imò cùm innumerasGeometricas veritates generalissimis, ac facillimis variarum demonstrationum methodis ejusmodi Opusculo maximè illustratas invenerim, Litterariæ Reipublicæ interesse judico, ut illius editio minimè ulteriùs differatur. Ita sentio ex Monast. Angelor. Flor. XVII. kal. August. ego D. Silvanus Ciapetti Monach. Camald. S.T.M. & in præfato Monast. Philos. Lector.

NOS D. DAMASCENUS DE MUTIIS ABBAS SS. HIPPOL. Et Laurentii de Faventia, & totius Camald. Ord. Generalis.

CUM Opus inscriptum, *Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum, &c. P. D. Guidonis Grandi in Pisano Atheneo Lectoris, & nostræ Congregat. Monachi*, duo ex eadem Congregat. S. Theol. Magistri, quibus id commissum fuit, recognoverint, ac in lucem edi posse probaverint, facultatem facimus, ut Typis mandetur, si iis, ad quos spectat, videbitur. Datum Faventiæ ex nostro Monast. SS. Hippoliti, & Laurentii die 21. Julii 1701.

*D. Damascenus de Mutiis Abbas Gener. Camald.*

Loco ✠ Sigilli.

*D. Marius Felix Ferrari Cancell. Congr.*

IL Molto Rev. P. Giovanni Scarlatti della Compagnia di Giesù riveda la presente Opera Matematica del M. R. P. Guido Grandi Monaco Camaldolense, e referisca se vi sia cosa contro la S. Fede, e buoni costumi. Dat. adì 20. Luglio 1701.

*Tommaso della Gherardesca Vic. Gen.*

De mandato Illustriss. & Reverendiss. D. Comitis Thomæ de Gherardeschis Vicarii Generalis Florentini, ego infrascriptus legi, & attentè consideravi Librum, cui titulus est, *Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam, seu Logarithmicam lineam*, compositum ab Eruditissimo Viro D. Guidone Grando Cremonensi Monaco Camaldulensi, & in Almo Pisano Lyceo Publico Philosophiæ Professore, nihilque in eo reperi, quod Catholicæ Fidei, vel bonis moribus adversetur, imò verò dignum existimo pro litteratorum eruditione, qui Typis mandetur; gratumque spero futurum omnibus strictè Mathesis Professoribus.

*Ego Joannes Scarlattus Societatis Jesu.*

Imprimatur, stante prædicta relatione

*Thomas de Gherardesca Vic. Gen.*

DE mandato Rev. P. Inquisit. Gener. Flor. A. R. P. M. Antonius Franciscus Cioppi Min. Conv. Consultor hujus S. Officii legat perattentè, utì solet, præsentem Librum, cui titulus est, *Geometrica Demonstratio, &c.* & referat, an ejusdem possit permitti impressio. Dat. in S. Off. Flor. die 24. Julii 1701.

*F. Lucius Augustin. Cecchini de Bon. Min. Conv. Vic. Gen. S. Off. Fl.*

JUssu Paternitatis Tuæ Reverendiss. attentè perlegi Librum, cui titulus est, *Geometrica Demonstratio, &c.* compositum ab Erudito Viro D. Guidone Grando Cremonensi, Monaco Camaldul. & in Almo Pisarum Lyceo Publico Philosophiæ Professore, nec in eo aliquid inveni, quod Catholicæ Fidei, nec bonis moribus adversetur, ideò dignum existimo, ut Typis mandetur. Datum Flor. die 27. Julii 1701. ita sentit

*F. Antonius Franciscus Cioppi Min. Conv. Consult. S. Off. Flor.*

Attenta suprapposita relatione Imprimatur

*F. Lucius August. Cecchini de Bon. Min. Conv. Vic. Gen. S. Off. Flor.*

Philippus Bonarota Senat. & Regiæ Celsitud. Auditor.



